

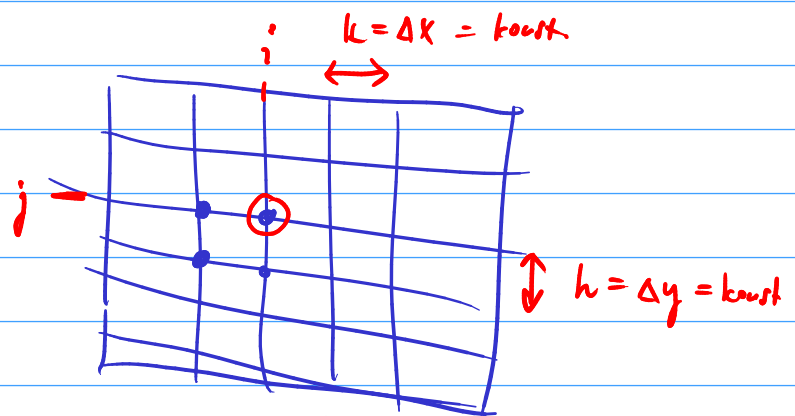
Toto jsou poznámky z přednášek z AR 2020/21  
opravené a aktualizované k: AR 2024/2025

## NMDT

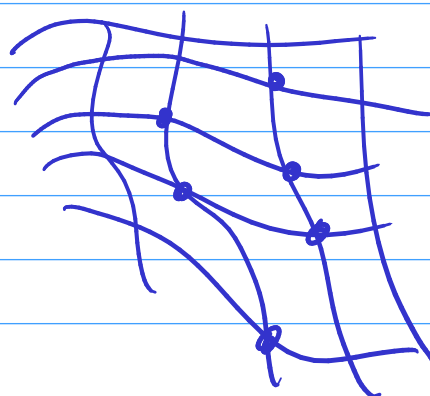
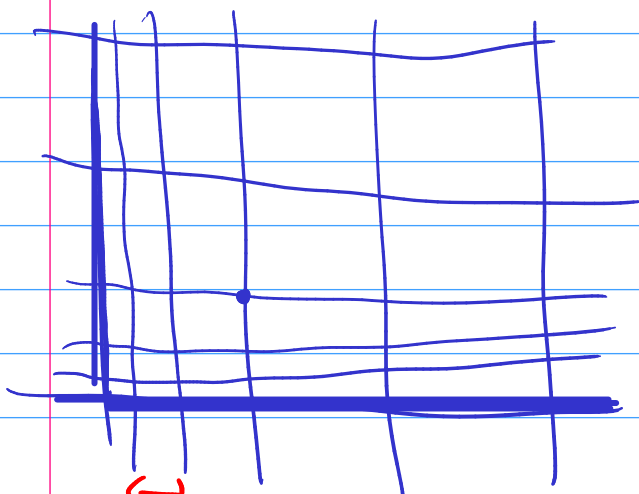
- připomenutí základní zachování - rovnice dynamiky tekutin
- klasifikace PDR, metoda charakteristik
- základy metody konečných diferencí, schémata MKD na typové úlohy a jejich vlastnosti: (1D)
- metoda konečných objemů  $\left\{ \begin{array}{l} \text{schémata} \quad (2D) \\ \text{druhy sítě} \quad (2D, 3D) \end{array} \right.$
- pokročilejší schémata a řešiče (OpenFOAM)
- "exotičtější" numerické metody
- počítačová vizualizace

ZKOUŠKA: diskuse o vaší práci (BP, VG, DP)  
v kontextu vlastností numerických metod ..

KLASICKÉ METODY -  
(eulerovský popis)

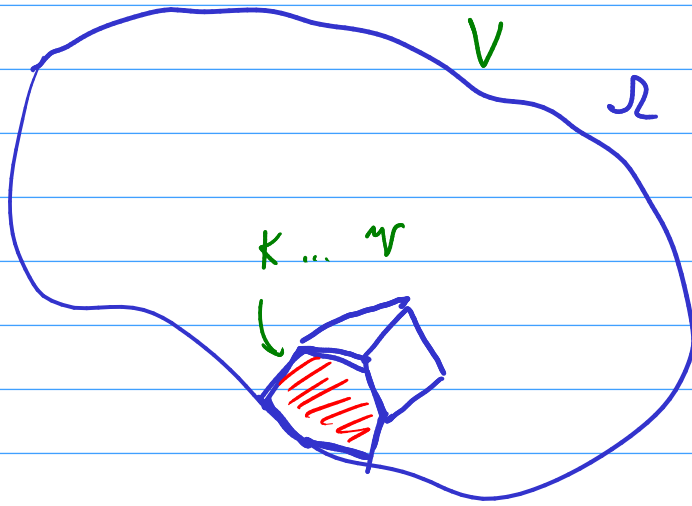


MKD - aproximace nekružných  
funkcí v bodech num. sítě



$\Delta x, \Delta y$  nejrov konst

• MKO (Finite Volume Method, FVM)

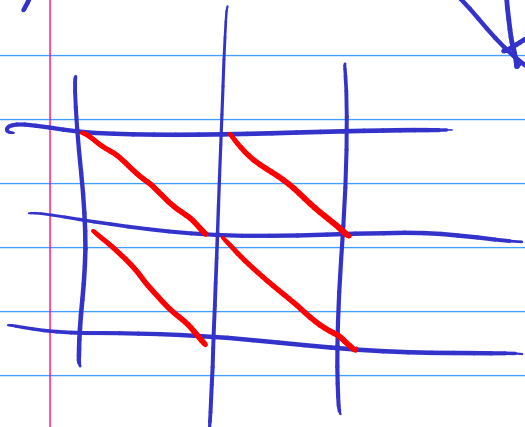
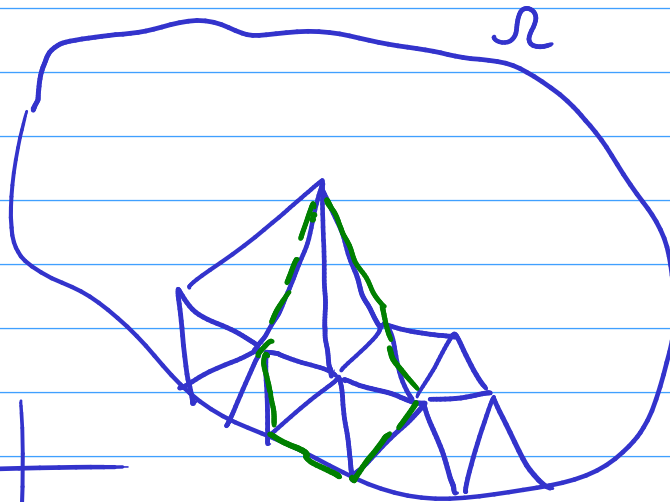


vzdělení oblasti  
na polygonální  
(ve 2D) nebo  
polyhedrální  
buněk  
(kontrolní objemy)

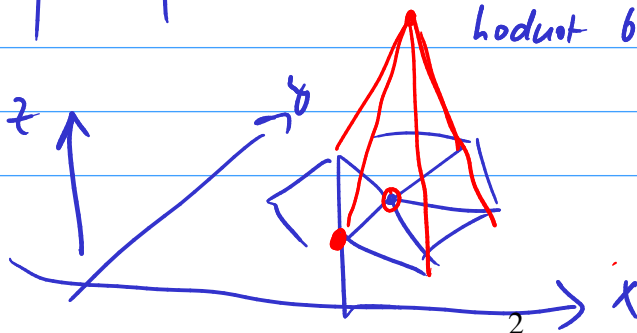
- num. řešení spočívá v aproximaci integrálů  
neznámých fci' přes buněk

• MKP

v obecnosti  
nestrukturované  
síť z  $\Delta$  ve 2D  
a čtyřstěny ve 3D

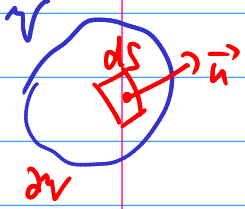


- num. řešení spočívá v aproximaci  
neznámých veličin lin. kombinací  
hodnot bázeových fcní



např. PA - elementy (pyramidální  
bázeové funkce)

## ROVNICE DYNAMIKY TEKUTIN



- pro vazhe' stlačitelné' proudění' jednoduše' tekutiny

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_j (\rho V_j) = 0$$

rovnice kontinuity

$$\frac{\partial (\rho V_i)}{\partial t} + \partial_j (\rho V_i V_j) = -\partial_i P + \partial_j \tilde{\tau}_{ij} + \rho F_i \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

3 rovnice pro hybnost

$$\frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \partial_j (\rho E V_j) = -\rho \partial_i V_i + \tilde{\tau}_{ij} \partial_j V_i + \partial_i (\lambda \partial_i T) + \rho \dot{Q}$$

rovnice pro vnitřní energii

$\rho$  .. hustota

$V_i$  .. složky rychlosti

$E$  .. specifická vnitřní energie

$E \rightarrow \hat{E}$

pro celkovou energii:  $\hat{E} = E + \frac{1}{2} \vec{V}^2 \quad \vec{V}^2 = \|\vec{V}\|^2$

$$\frac{\partial (\rho \hat{E})}{\partial t} + \partial_j (\rho \hat{E} V_j) = -\partial_i (\rho V_i) + \partial_j (V_i \tilde{\tau}_{ij}) + \rho F_i V_i + \partial_i (\lambda \partial_i T) + \rho \dot{Q}$$

$v_e \neq 0$  ( $i \in \{1, 2\}$ ) lze přepsat ( $\vec{F} = 0$ )  
 $\dot{Q} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} =: \partial_t$$

$$\partial_t \rho + \partial_1 (\rho v_1) + \partial_2 (\rho v_2) = 0$$

$$i=1 \quad \left| \quad \partial_t (\rho v_1) + \partial_1 (\rho v_1^2 + p) + \partial_2 (\rho v_1 v_2) = \partial_1 \tau_{11} + \partial_2 \tau_{12} \right|$$

$$i=2 \quad \left| \quad \partial_t (\rho v_2) + \partial_1 (\rho v_2 v_1) + \partial_2 (\rho v_2^2 + p) = \partial_1 \tau_{21} + \partial_2 \tau_{22} \right|$$

$$\partial_t (\rho \hat{E}) + \partial_1 (v_1 (\rho E + p)) + \partial_2 (v_2 (\rho E + p)) = \bigcirc + \square$$

$$\bigcirc = \partial_1 (v_1 \tilde{\tau}_{11} + \lambda \partial_1 T)$$

$$\square = \partial_2 (v_2 \tilde{\tau}_{12} + \lambda \partial_2 T)$$

$$\partial_t \vec{W} + \underbrace{\partial_1 \vec{F} + \partial_2 \vec{G}}_{\text{nevažné fyzikální toky (advekční)}} = \underbrace{\partial_1 \vec{R} + \partial_2 \vec{S}}_{\text{vážné (difúzní) fyz. toky = \nabla \cdot (\vec{R}, \vec{S})}}$$

nevažné fyzikální toky  
 (advekční)  
 $= \nabla \cdot (\vec{F}, \vec{G})$

vážné (difúzní)  
 fyz. toky  
 $= \nabla \cdot (\vec{R}, \vec{S})$

Pozn : Eulerovy rovnice  $\Leftrightarrow$  nevažné proudění

$$\rightarrow \vec{R}, \vec{S} = \vec{0}$$

"  
Eulerova rovnice v 1D

$$\partial_t u + \partial_x (f(u)) = 0$$

↓ linearizace

$$\partial_t u + \underbrace{f'(u)}_{\approx \text{konst}} \partial_x u = 0$$

$$\partial_t u + a \partial_x u = 0$$

transportní rovnice

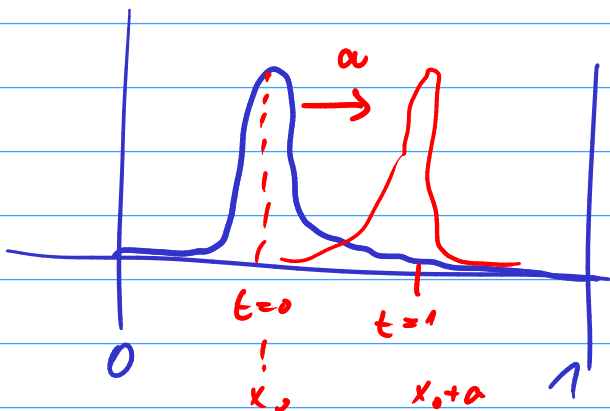
úloha pro  $\rightarrow$  :

poč. podmínka  $u(0, x) = u_0(x)$

okraj. podmínka na  $\Omega = (0, 1)$  budou na  $\partial\Omega = \{0, 1\}$

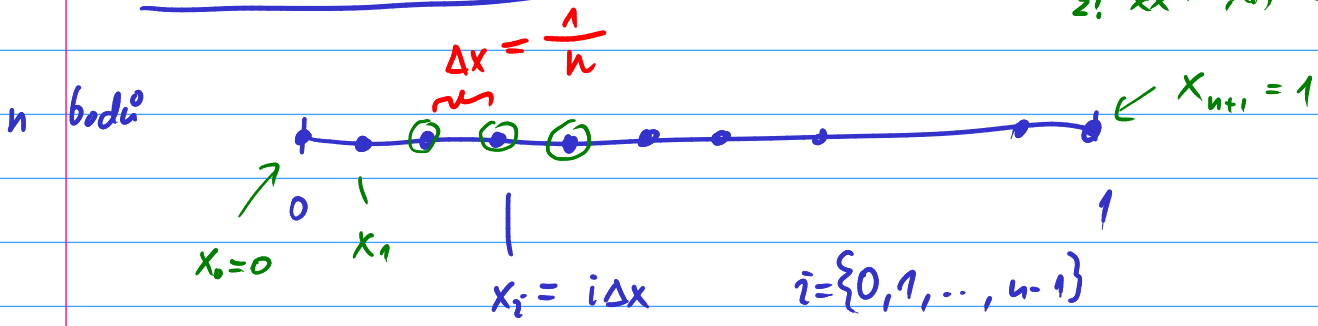
$$u(0) = u(1) = 0$$

přesná (exaktní) řešení je :

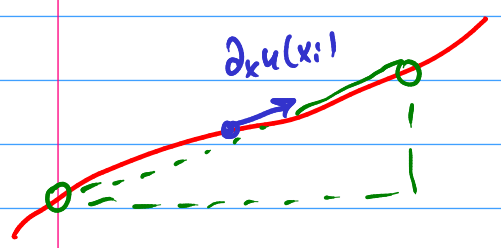
$$u(t, x) = \begin{cases} u_0(x-at) & \text{pro } x > at \\ 0 & \text{pro } x < at \end{cases}$$


Polus 0 num. řešení

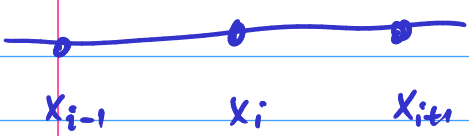
$$u(t, x_{i+1}) = u(t, x_i) + \partial_x u(t, x_i) \Delta x + \frac{1}{2!} \partial_{xx} u(t, x_i) \Delta x^2 + O(\Delta x^3)$$



$$\partial_x u(t, x_i) = \frac{u(t, x_{i+1}) - u(t, x_{i-1})}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$



$$\partial_t u(t_k, x) = \frac{u(t_k, x) - u(t_{k-1}, x)}{\Delta t} + O(\Delta t)$$



musíme "vidět" num. schémata

$a \Delta t < \Delta x$   $a \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$   $\Rightarrow$  dostaneme schéma:

2. krok:  $u(t_k, x_i) \rightarrow u_i^k$  (číslo)

o tak daleko, odkud přichází informace do  $x_i$  (CFL ... viz příloha)

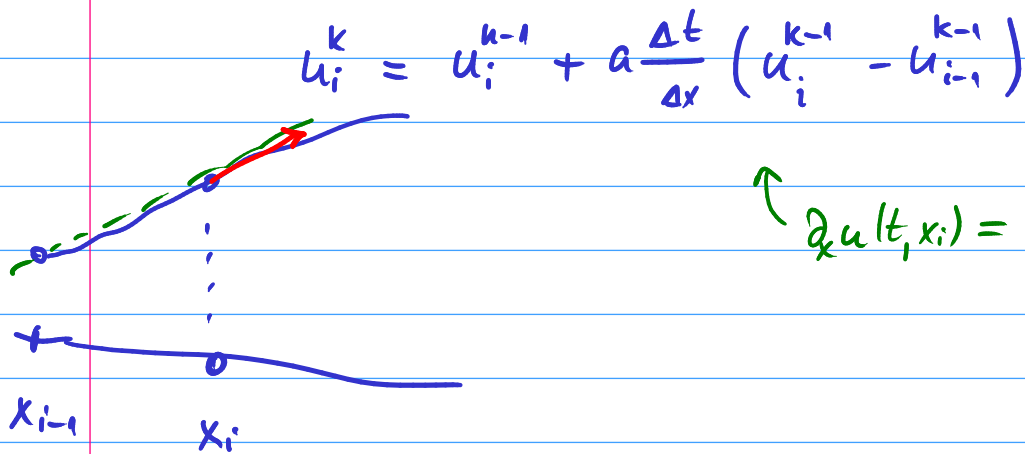
$$\frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^{k-1} - u_{i-1}^{k-1}}{2\Delta x} = 0$$

$$\Rightarrow u_i^k = u_i^{k-1} + a \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^{k-1} - u_{i-1}^{k-1})$$

pro  $a > 0$  tato hodnota není větší než u<sub>i</sub> vliv na hodnotu řešení v bodě  $x_i$ !

explicitní centrální schéma

NEFUNKUJE: propaguje informaci nesprávným směrem

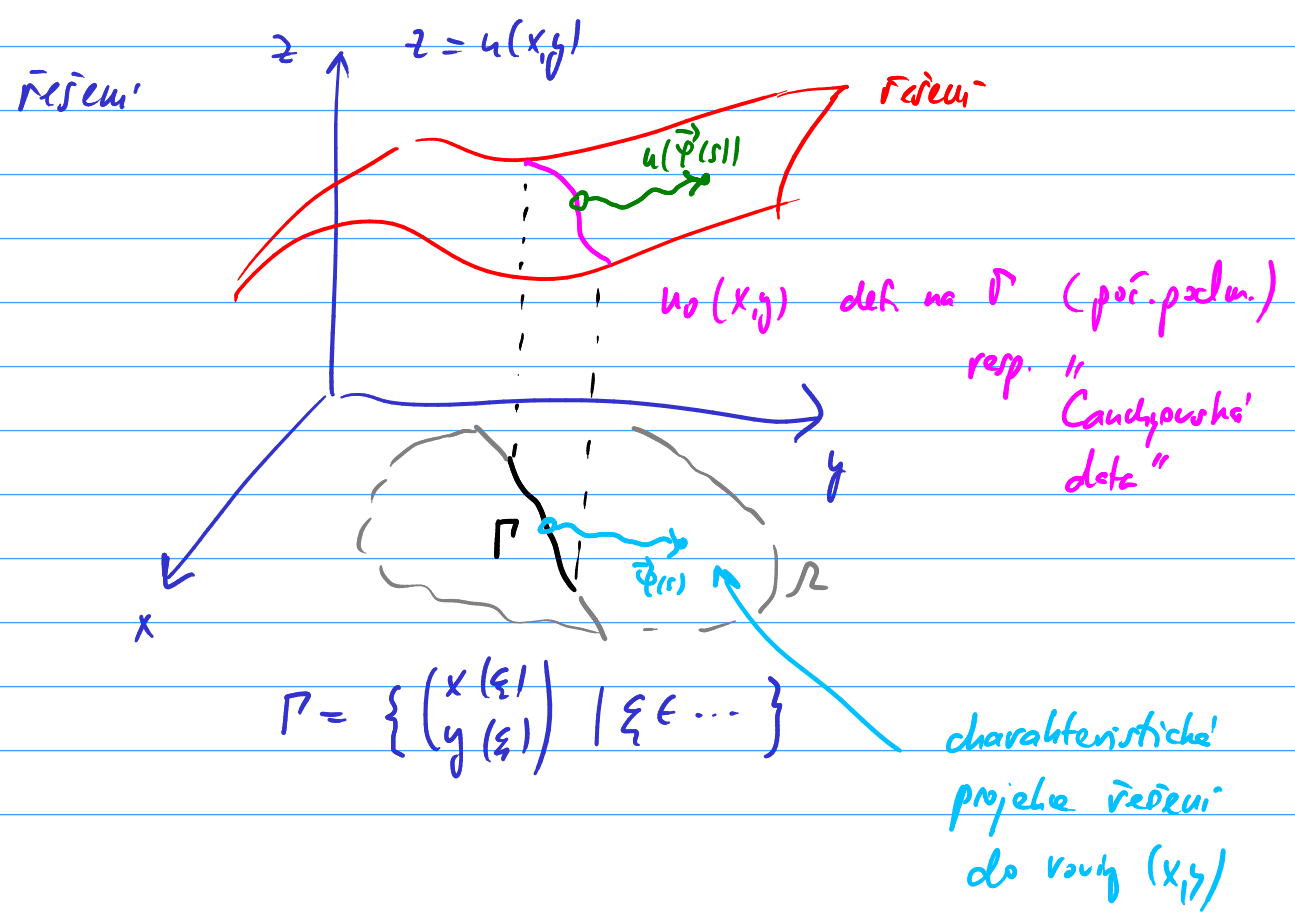


$$\uparrow \partial_x u(t, x_i) = \frac{u(t, x_i) - u(t, x_{i-1})}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

KLASIFIKACE PDR (2. řádu), CHARAKTERISTIKY

nejdříve 1 rovnice 1. řádu (kvalitativně) ve 2D  
pro neznámou funkci  $u = u(x, y)$

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u) \quad | \text{det } (*)$$



na  $\Gamma$ :  $\frac{du_0}{d\xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{d\xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{d\xi}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{dx}{d\xi} & \frac{dy}{d\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ \frac{du_0}{d\xi} \end{pmatrix}$

1. řádek = PDR

2. řádek

Řešení (jednoznačné) ex.  $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ \frac{dx}{d\xi} & \frac{dy}{d\xi} \end{vmatrix} \neq 0$

PDR řešíme podle křivky  $\varphi = \langle \vec{\varphi} \rangle$   $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(s)$ , ktera

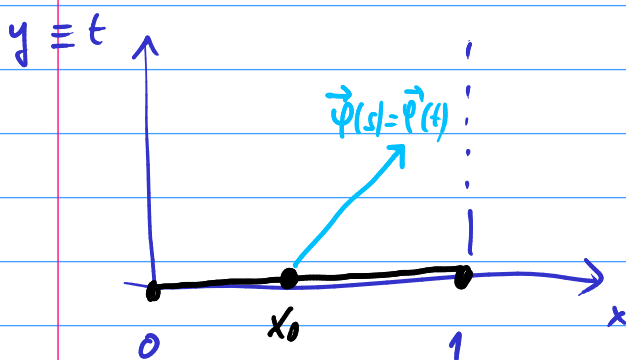
záadne na  $\Gamma$ , tj.  $\vec{\varphi}(0) = \begin{pmatrix} x(\xi) \\ y(\xi) \end{pmatrix}$  pro dané  $\xi$

Funkce  $u$  řeší (\*) na křivce  $\varphi \Leftrightarrow \vec{\varphi}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$

(\*)  $\left. \begin{aligned} \frac{du}{ds} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} \\ \parallel & \\ c &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot a + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot b \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{ds} = a(x, y, u(x, y)) \\ \frac{dy}{ds} = b(x, y, u(x, y)) \\ \frac{du}{ds} = c(x, y, u(x, y)) \end{cases}$

Pr. transportní rovnice  $\partial_t u + a \partial_x u = 0$

$t \equiv y$   
 $b \equiv 1, c = 0$



$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \langle 0, 1 \rangle \right\}$

$\frac{dx}{ds} = a, \frac{dt}{ds} = 1, t|_{s=0} = 0$

$\frac{du}{ds} = c = 0$   $s = t$

$\Rightarrow \left( \frac{dx}{dt} = a \right) \wedge \left( x|_{t=0} = x_0 = \vec{\Gamma}(\xi) \right) \Rightarrow x(t) = x_0 + at$



$$\Rightarrow u(t, x) = u_0(0, x_0) = u_0(0, x - at) \leftarrow$$

"Tolůž" pro soustavu qLPR

$$A \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + B \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} = \vec{c} \quad \vec{u} = \vec{u}(x, y) \in \mathbb{R}^n$$

$$A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad A, B = A, B(x, y, u)$$

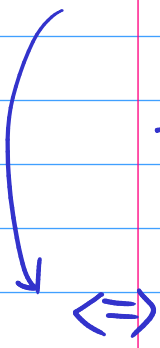
⋮  
hledáme tzv. charakteristické směry

Rovnice 2. řádku (kva zilineární)

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} = g$$

↑ nové zde "h.u"

$$\Rightarrow v = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial u}{\partial y}$$



$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b & c \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g - dv - ew \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. řádek:  $\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

uzavřenost dif. formy  
 $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = v dx + w dy$

přeformulováno jsou rovnici 2. ř.  
pomocí 2 rovnic 1. řádku

$\Rightarrow$  (bez důkazu) charakteristický splňují:  $\frac{dy}{dx} = \lambda$ , kde

$$\begin{vmatrix} 2b - a\lambda & c \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = a\lambda^2 - 2b\lambda + c = 0 \quad \text{kvad. rovnice pro } \lambda$$

$$\text{kde } \lambda_{1,2} = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

$$D = b^2 - ac$$

PDR se nazývá!

- $D > 0 \Rightarrow$  existují 2 kořeny  $\Rightarrow$  2 charakteristické  $\rightarrow$  HYPERBOLICKÁ
- $D = 0 \rightarrow$  exist. 1 kořen  $\Rightarrow$  1 charakt.  $\Rightarrow$  PARABOLICKÁ
- $D < 0 \Rightarrow$  nek.  $\lambda$  (charakt. jsou imaginární)  $\Rightarrow$  ELIPTICKÁ

Pozn k uzvustovi:  $Q(x,y) = ax^2 - 2bxy + cy^2 + dx + ey + g = 0$

$D > 0 \Rightarrow Q=0$  je rovnice HYPERBOLY

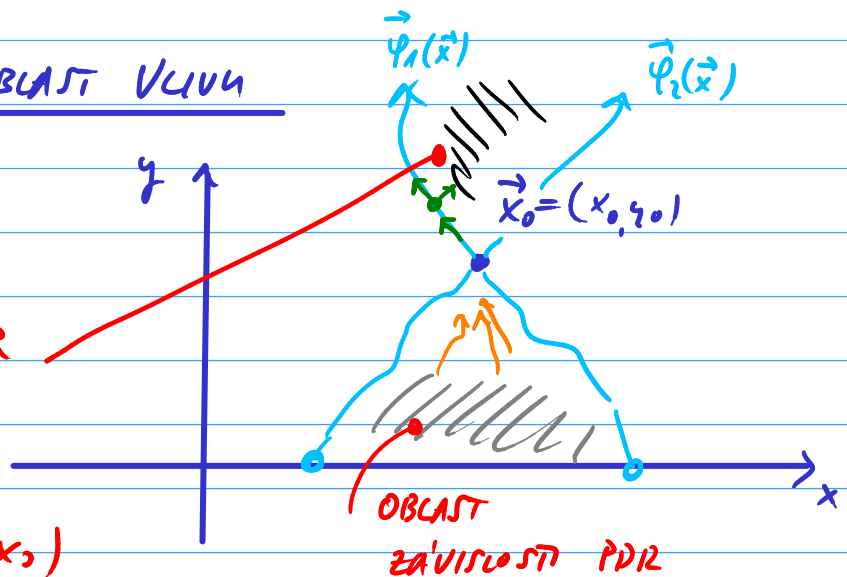
$D = 0$  PARABOLY

$D < 0$  — | — FLIPSY

### OBLAST ZA'VISLOSTI A OBLAST VLIUVU

1) HYPERBOLICKÁ ROVNICE

OBLAST VLIUVU PDR  
hodnota  $u$  v bodech  
vlivu je ovlivněna  
hodnotou  $u$  v bodech  $x_0$ )



( $u(x_0)$  závisí na hodnotách  
 $u$  v bodech ležících v  
oblasti závislosti)

## 2) PARABOLICKÁ PDR

např. rovnice vedení  
tepla

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} = g$$

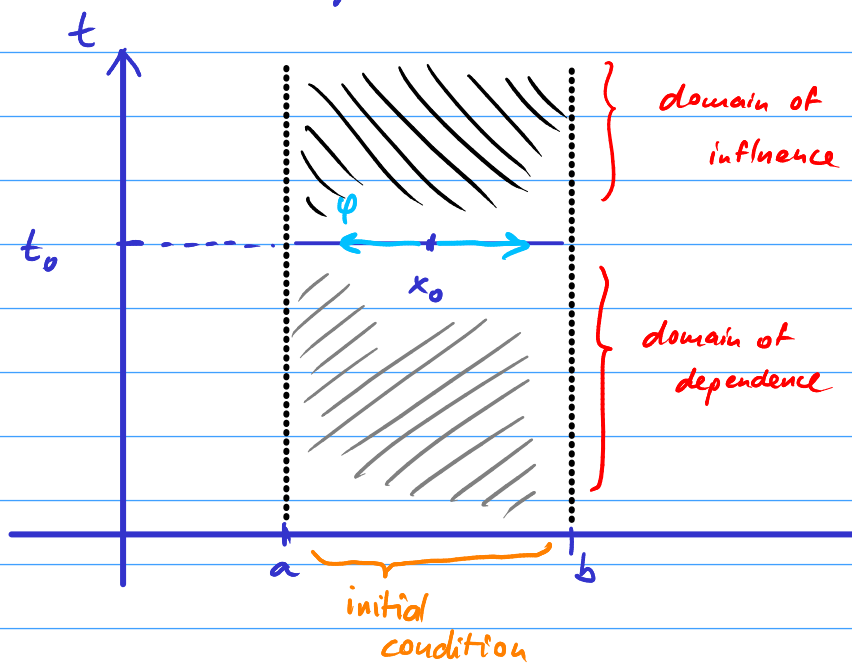
$a=1$        $b, c, d=0$        $e=-1$

$$\Rightarrow \text{mluvne } \lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = 0$$

$$y \equiv t$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} \equiv \frac{dt}{dx} = 0 \Rightarrow \text{charakteristiky jsou rovnoběžné s osou } \vec{x}$$

informace se šíří  
podél prostorové osy  
(osy  $x$ ) nekonečně  
rychle v každém  
čase  $t_0$ .



Pozn: typ ① a typ ②  
hyp.      parzb.

se dějí vřít jako evoluční

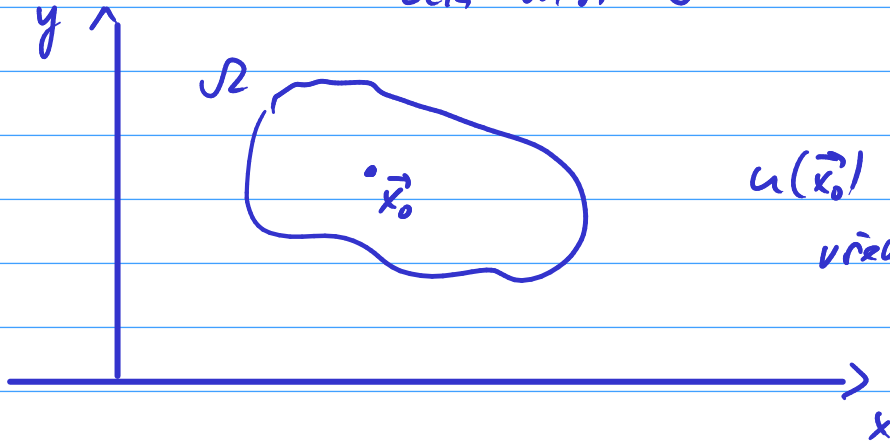
### 3) ELIPTICKÁ PDR

např.

$$\Delta u = f$$

- neexistují charakteristiky

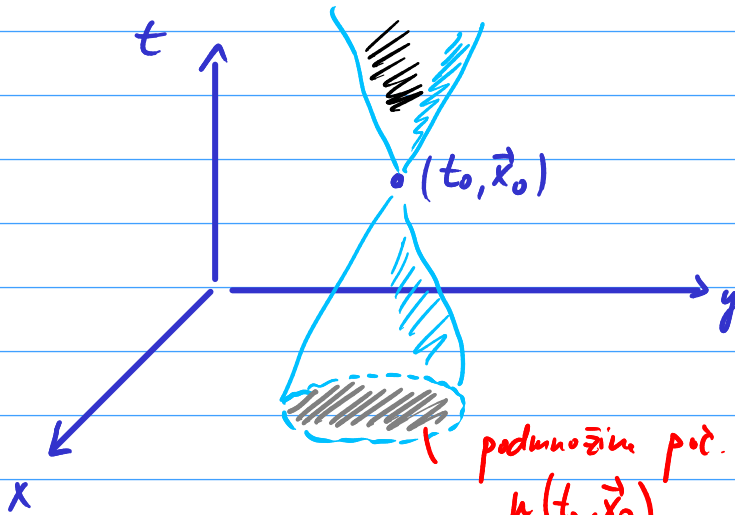
- oblast vlivu i oblast zdatnosti je celá oblast  $\Omega$



$u(\vec{x}_0)$  závisí na  $u$  ve všech bodech  $\Omega$

Pozn : LICHTA VE VYŠŠÍ DIMENZI

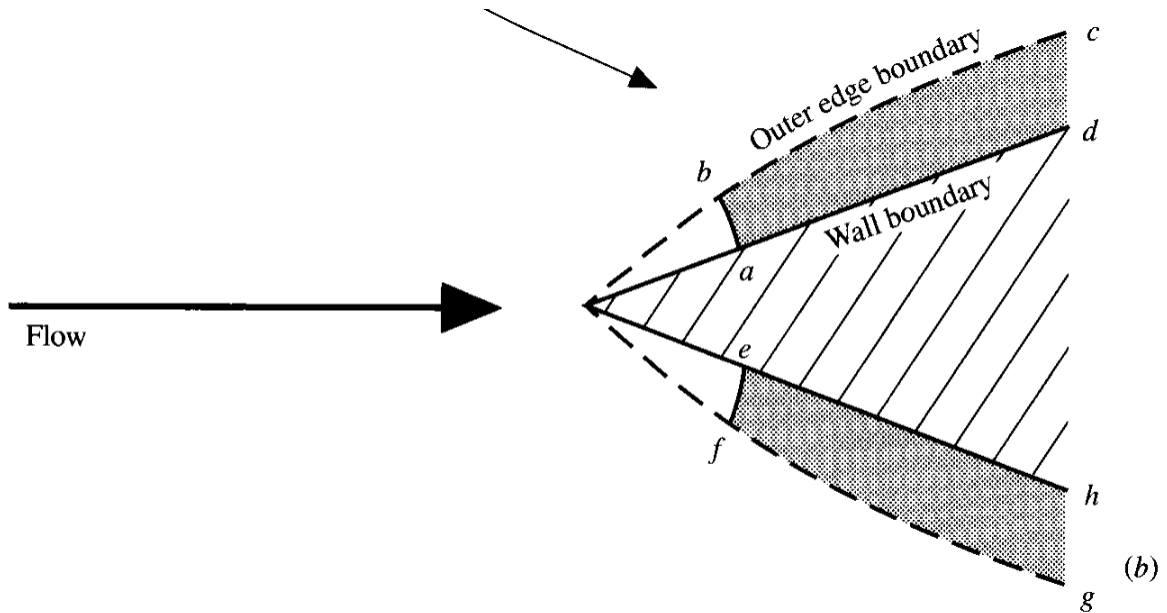
Hyperbolické rovnice v oblasti  $y \times \Omega$  kde  $y = (0, T_{max})$   
 $\Omega \in \mathbb{R}^2$



(podmnožina poč. podmínek, na které závisí  $u(t_0, \vec{x}_0)$ )

Pozn: NS rovnice mohou být tzv. "smíšeného typu"

- podzvukové vazké proudění  $\Rightarrow$  parabolické dnovní
- nadzvukové proudění  $\Rightarrow$  hyperbolické dnovní



- nevazké proudění (Eulerovy rovnice)  $\Rightarrow$  hyperbolické

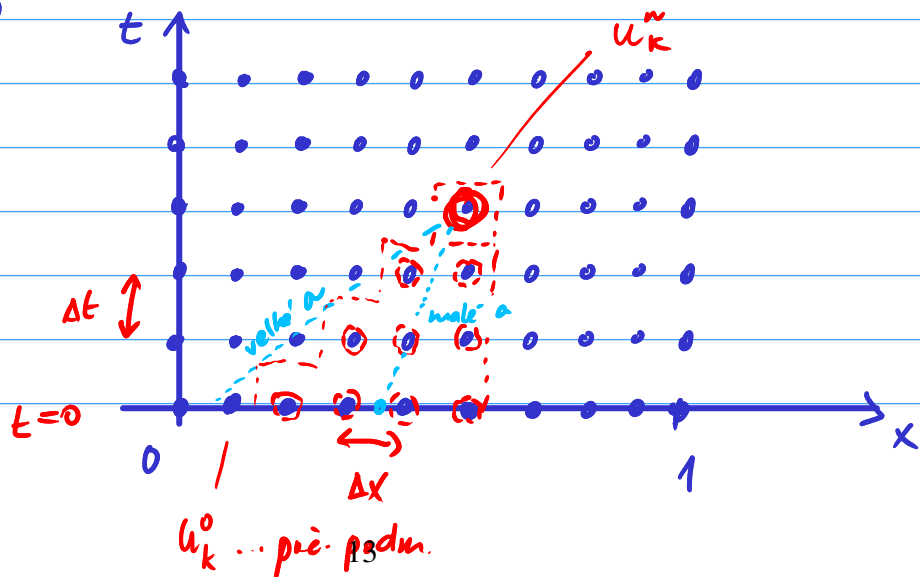
zpět ke schémata pro transportní rovnici:

$$\partial_t u + a \partial_x u = 0$$

pro  $a > 0$

$$\rightarrow u_k^{n+1} = u_k^n + a \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_k^n - u_{k-1}^n)$$

$$u_k^n \approx u(\text{nat}, k \Delta x)$$



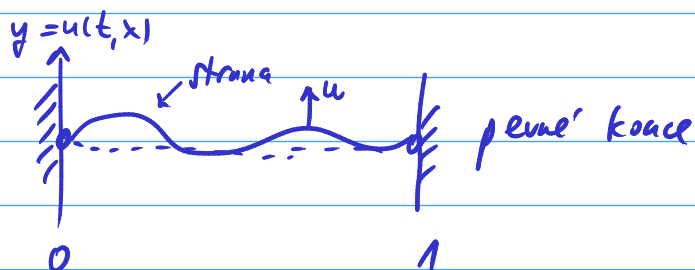
## CFL Podmínka (Courant, Friedrichs, Lewy) (1928)

Nutná podmínka konvergence numerického schématu je, aby oblast závislosti PDR byla podmnožinou oblasti závislosti numerického schématu.

Pro transportní rovnici:  $a\Delta t \leq \Delta x \Leftrightarrow \frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \left(\frac{1}{a}\right) \text{ Courantovo číslo}$$

Vlnová rovnice u 1D



$$\partial_{tt} u = a^2 \partial_{xx} u$$

okraj. p.  $u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \quad \forall t$

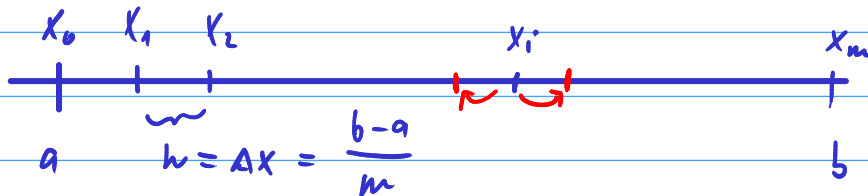
poč. p.  $u(0, x) = u_0(x) \quad \text{poč. poloha}$

$\partial_t u(0, x) = v_0(x) \quad \text{poč. rychlost}$

num. schéma: přístě + CFL podmínka

# METODA KONEČNYCH DIFERENCIÍ

diferenciální hodnoty derivací funkce  $u : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$   
 $u \in C^{(l)}(a, b)$



def  $u_i := u(a + ih) (= u(x_i))$   $i \in \{0, \dots, m\}$   
 ale i pro  $i \in \mathbb{R}$   
 $u_i^{(k)} := u^{(k)}(a + ih)$   $u_i' := u_i^{(1)}$

Necht' jsou dána čísla  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l \in \mathbb{R}$

Potom  $\exists c_1, \dots, c_l$  takové, že

$$u_i' = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^l c_j u_{i+\alpha_j} + \mathcal{O}(h^{l-1})$$

$\approx k \cdot h^{l-1}$   
řídá aproximace

(Dk:) Jak najít  $c_j$ ?

$$u_{i+\alpha_j} = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{u_i^{(k)}}{k!} \underbrace{\left( \underbrace{a + (i+\alpha_j)h}_{= x_{i+\alpha_j}} - \underbrace{(a+ih)}_{x_i} \right)^k}_{\alpha_j h} + \mathcal{O}(h^l) \quad \forall j$$

=  $x_{i+\alpha_j}$   
pro  $\alpha_j \in \mathbb{Z}$

dusadime

$$\frac{1}{h} \sum_{j=1}^l c_j u_{i+\alpha_j} = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^l c_j \left[ \sum_{k=0}^{l-1} \frac{u_i^{(k)}}{k!} (\alpha_j h)^k + \mathcal{O}(h^l) \right] =$$

$$\sum_{k=0}^{l-1} u_i^{(k)} \underbrace{\sum_{j=1}^l \frac{\alpha_j^k h^{k-1}}{k!} c_j}_{b_k} + \mathcal{O}(h^{l-1}) \stackrel{!}{=} u_i'$$

chtene  $b_1 = 1$  a  $b_k = 0$  pro  $k \neq 1$

podminky tvorí soustavu lin. rovnic pro  $c_j$  ve tvaru

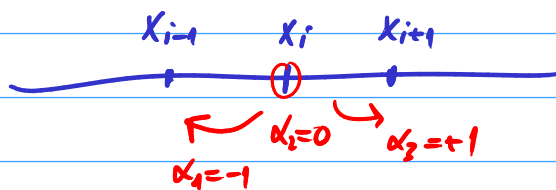
$$A \vec{c} = \vec{b} \quad \text{kde} \quad A = (a_{kij}) = \left( \frac{\alpha_j^k h^{k-1}}{k!} \right) \in \mathbb{R}^{l \times l}$$

$$k \in \{0, \dots, l-1\}, j \in \{1, \dots, l\}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pr. 6

centrální diference :  $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 1$



$j$       1      2      3

$$\begin{matrix} k \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & \frac{1}{h} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{h}{2} & 0 & \frac{h}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{h}{2} & 0 & \frac{h}{2} & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$c_3 = \frac{1}{2}, c_1 = -\frac{1}{2}, c_2 = 0$$

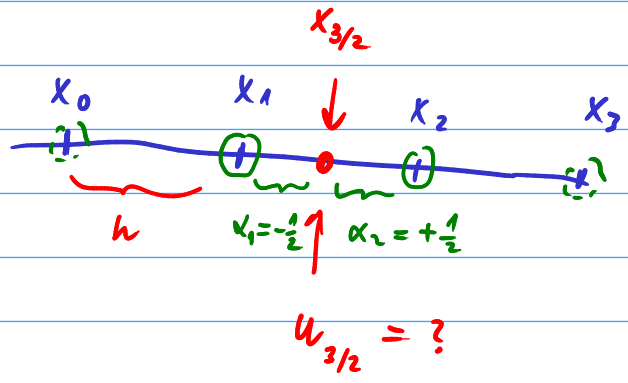


$$u'_i = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^l c_j u_{i+\alpha_j} + O(h^{l-1})$$

$$u'_i = \frac{1}{2h} (-u_{i-1} + 0 \cdot u_i + u_{i+1}) + O(h^2)$$

$$= \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$$

POZN - INTERPOLACE

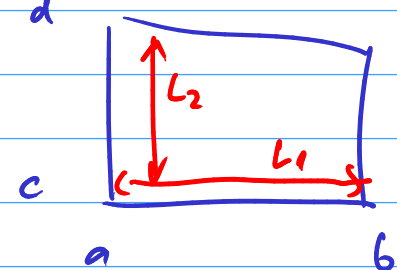


DŮ: najít interpolaci  $u_{3/2}$  pomocí  $u_1, u_2$   
 $u_0, u_1, u_2, u_3$

ZÁKLADNÍ PŮJMY METODY KONEČNÝCH DIFFERENCÍ  
 na  $\mathcal{Y} \times \Omega$  kde  $\mathcal{Y} = (0, t_{max})$ ,  $\Omega = (a, b) \times (c, d) \subset \mathbb{R}^2$

$$t \in \mathcal{Y}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \Omega$$

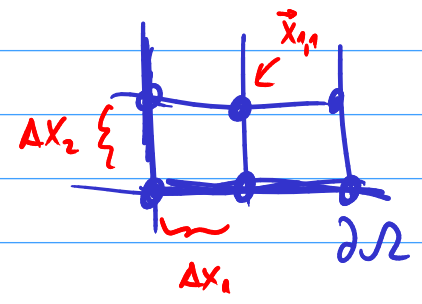
e  $L_1 = b - a, L_2 = d - c$



na  $\Omega$  definujeme sít' ekvidistantních bodů (uzlů) o  $(m_1 + 1) \cdot (m_2 + 1)$  uzlech

def  $\Delta x_1 = \frac{L_1}{m_1}, \Delta x_2 = \frac{L_2}{m_2}$

def.  $\vec{x}_{i,j} = \begin{pmatrix} i \Delta x_1 \\ j \Delta x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$

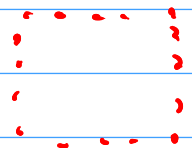


- def.  $h = \max(\Delta x_1, \Delta x_2) \approx \frac{1}{h}$   <sup>$\leftarrow \min\left(\frac{m_1}{L_1}, \frac{m_2}{L_2}\right)$</sup>  budeme uvažovat prstovcové roztřísčeví síť

- množina vnitřních uzlů sítě  $\omega_h = \left\{ \vec{x}_{ij} \mid i \in \{1, \dots, m_1-1\}, j \in \{1, \dots, m_2-1\} \right\}$

- množina všech uzlů sítě  $\bar{\omega}_h = \left\{ \vec{x}_{ij} \mid i \in \{0, \dots, m_1\}, j \in \{0, \dots, m_2\} \right\}$

- množina hraničních uzlů  $\gamma_h = \bar{\omega}_h \setminus \omega_h$



- def.  $\Delta t = \frac{t_{\max}}{N}$

a  $t^n = n \Delta t$  pro  $n \in \{0, \dots, N\}$  nazýváme n-tou časovou vrstvu

- množina časových vrstev

$$\begin{aligned} z^{\Delta t} &= \{t^n \mid n \in \{1, \dots, N\}\} \\ \bar{z}^{\Delta t} &= \{t^n \mid n \in \{0, \dots, N\}\} \end{aligned}$$

- prostor síťových funkcí

$$\mathcal{H}_h^{\Delta t} = \left\{ w_h^{\Delta t} \mid w_h^{\Delta t}: \bar{z}^{\Delta t} \times \bar{\omega}_h \rightarrow \mathbb{R} \right\}$$

prvky  $\mathcal{H}_h^{\Delta t}$  jsou "síťové funkce"

- $w_{ij}^n := w_h^{\Delta t}(t^n, \vec{x}_{ij})$

- operátor projekce na síť  $\mathcal{P}_h^{\Delta t}: C(\bar{\gamma} \times \bar{\Omega}) \rightarrow \mathcal{H}_h^{\Delta t}$

definujeme  $\left( \mathcal{P}_h^{\Delta t} u \right)_{ij}^n = u(t^n, \vec{x}_{ij})$   
 $\in \mathcal{H}_h^{\Delta t}$

Pozn: pro vekt. fce lze totéž po složkách

DIFERENČNÍ NÁHRADY PROSTOROVÝCH PARCIÁLNÍCH DERIVACÍ

$u \in C^1(\mathbb{R}^n \times \Omega)$       $w \in \mathcal{J}_h^{\Delta t}$

def.  $\left( \overleftarrow{\delta}_{x_1} w \right)_{ij}^n = \frac{w_{i,j}^n - w_{i-1,j}^n}{\Delta x_1}$

řídová fe na  $\overleftarrow{z}^{\Delta t} \times w_h$      zprava' dif.

platí když  $w = \mathcal{P}_h^{\Delta t} u$  :  
 $\left( \overleftarrow{\delta}_{x_1} \mathcal{P}_h^{\Delta t} u \right)_{ij}^n = \partial_{x_1} u(t^n, \vec{x}_{ij}) + \mathcal{O}(h)$

$\left( \overrightarrow{\delta}_{x_1} w \right)_{ij}^n = \frac{w_{i+1,j}^n - w_{i,j}^n}{\Delta x_1}$      dopředu' dif.

$\left( \overleftrightarrow{\delta}_{x_1} w \right)_{ij}^n = \frac{w_{i+1,j}^n - w_{i-1,j}^n}{2\Delta x_1}$      centrální' dif.

$\left( \overleftarrow{\delta}_{x_2} w \right)_{ij}^n = \frac{w_{i,j}^n - w_{i,j-1}^n}{\Delta x_2}$      atd  $\overrightarrow{\delta}_{x_2} w, \overleftrightarrow{\delta}_{x_2} w$

Pozn :  
 kdyby byl  $\mathcal{J}_h^{\Delta t}$  na  $\overleftarrow{z}^{\Delta t} \times \bar{w}_h$   
 $\mathcal{J}_h^{\Delta t}$  na  $\overleftarrow{z}^{\Delta t} \times w_h$   
 pak  $\overleftarrow{\delta}_{x_1} : \mathcal{J}_h^{\Delta t} \rightarrow \mathcal{J}_h^{\Delta t}$   
 ↓  
 $\mathcal{J}_h^{\Delta t}$

Pozn : DIV, GRAD

$\overleftarrow{\nabla}_h w = \begin{pmatrix} \overleftarrow{\delta}_{x_1} w \\ \overleftarrow{\delta}_{x_2} w \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\nabla}_h = \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix}$

$\overleftrightarrow{\nabla}_h w = \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix}$

$\overleftrightarrow{\nabla}_h \vec{w} = \overleftarrow{\delta}_{x_1} w_1 + \overleftarrow{\delta}_{x_2} w_2$      kde  $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$

$w_1, w_2 \in \mathcal{J}_h^{\Delta t}$

atd.  $\overrightarrow{\nabla}_h \cdot \vec{w}, \overleftrightarrow{\nabla}_h \cdot \vec{w} = \dots$

blíže viz rovnice vedení tepla a její disk. Pozn :

$\Delta_h w = \overrightarrow{\nabla}_h \cdot (\overleftarrow{\nabla}_h w) = \overleftarrow{\nabla}_h \cdot (\overrightarrow{\nabla}_h w) = \overleftarrow{\delta}_{x_1}^2 w + \overleftarrow{\delta}_{x_2}^2 w$

centrální náhrada  $\partial_{x_1}^2 u$

# DIFERENČNÍ NAHRADY ČAS. DERIVACE

$$\left( \overleftarrow{\delta}_t w \right)_{ij}^n = \frac{w_{ij}^n - w_{ij}^{n-1}}{\Delta t}, \quad \left( \overrightarrow{\delta}_t w \right)_{ij}^n = \frac{w_{ij}^{n+1} - w_{ij}^n}{\Delta t}$$

$\swarrow$  zpět
 $\searrow$  dopředu

$\swarrow$  sítové funkce def. na  $z^{At} \times \bar{w}_h$

## KONZISTENCE, KONVERGENCE A STABILITA DIF. SCHEMAT

(Př) upwind schéma pro  $\partial_t u + a \partial_x u = 0$  ( $a > 0$ )  
 na  $\mathbb{T} \times \Omega$ ,  $\Omega = (0,1)$   $\leftarrow u \in C^1(\mathbb{T} \times \Omega)$

num. řešení je  $u_h^{At} \in \mathcal{I}_h^{At}$  ( $h = \Delta x$ )

$\frac{u((n+1)\Delta t, k\Delta x) - u(n\Delta t, k\Delta x)}{\Delta t}$  def.  $u_h^{At}(t^n, x_k) =: u_k^n$  zjednodušené  
značení

$= \partial_t u(n\Delta t, k\Delta x) + O(\Delta t)$  ke explicitně vyjádřit  $t^n = n \cdot \Delta t$   $x_k = k \cdot \Delta x$

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} + a \frac{u_k^n - u_{k-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\delta}_t u_h^{At} + a \overleftarrow{\delta}_x u_h^{At} = 0$$

(\*) PDR:  $Lu = f(t, \vec{x}, u)$   $L \dots$  diferenciální operátor (lin.)  $u = (t, \vec{x})$

(\*\*) MKD:  $L_h^{At} u_h^{At} = f_h^{At}$   $L_h^{At} \dots$  diferenciální operátor uložení sítové fce

(diferenční schéma) pokud  $f = f(t, \vec{x}) \dots$   $f_k^{At} = P_h^{At} f$

$f_k^n := (f_h^{At})_k^n = f(t^n, x_k) \quad \forall 10$

pokud  $f = f(t, \vec{x}, u) \dots$   $f_k^n = f(t^n, x_k, u_k^n)$

• norma  $\|\cdot\|_h^{At}$  na  $\mathcal{I}_h^{At}$  je KONZISTENTNÍ, existuje-li

norma  $\|\cdot\|_C$  na  $C(\bar{\gamma} \times \bar{\Omega})$  taková, že

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \|\mathcal{P}_h^{At} u\|_h^{At} = \|u\|_C$$

předpí, jak spočítat normu na konkrétní síti

Např. norma  $\|w\|_h^{At} = \max_{\bar{\gamma} \times \bar{\Omega}} |w(t, \vec{x})|$  je konzistentní

$$\text{s normou } \|u\|_C = \max_{\bar{\gamma} \times \bar{\Omega}} |u(t, \vec{x})|$$

• chyba aproximace diferenciálního operátora je síťová funkce

$$E(u) = L_h^{At}(\mathcal{P}_h^{At} u) - \mathcal{P}_h^{At}(Lu) \quad : \quad \mathcal{I}^{At} \times \omega_h \rightarrow \mathbb{R}$$

kde  $\|\cdot\|_h^{At}$  je konzistentní norma

• pokud  $\|E(u)\|_h^{At} = \mathcal{O}(h^p + (\Delta t)^q)$ , řekneme, že  $L_h^{At}$

aproximuje  $L$  s řádem  $p$  v prostoru a s řádem  $q$  v čase

pokud  $p, q > 0$ , tak diferenciální schéma ~~KK~~ nazýváme KONZISTENTNÍ

• numerické schéma ~~KK~~ je KONVERGENTNÍ ( $\Leftrightarrow$ )

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \|u_h^{At} - \mathcal{P}_h^{At} u\|_h^{At} = 0 \quad \text{ kde } \|\cdot\|_h^{At} \text{ je konzist.}$$

" $u_h^{At}$  konverguje k  $u$ "

$(\frac{At}{h}) \in \mathcal{A}$  ... viz dále

může a nemusí navíc!

Pozn:  $e_h^{At} = u_h^{At} - P_h^{At} u$  je globální chyba aproximace

Pozn: Aproximace okraj. podmínek

diferenciální rovnice

$$Lu = f$$

poč. podm

$$u(0, \vec{x}) = u_{ini}(\vec{x})$$

okraj. podm

$$Bu(t, \vec{x})|_{\partial\Omega} = g(t, \vec{x})$$



diferenciální řešení

$$L_h^{At} u_h^{At} = f_h^{At}$$



$$u_h^{At} \Big|_{\{0\} \times \bar{\omega}_h} = P_h u_{ini} \Big|_{\bar{\omega}_h}$$

operator okrajové podm



$$B_h^{At} u_h^{At} \Big|_{\bar{z}^{At} \times \gamma_h} =$$

$$\bar{\omega}_h \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathcal{H}_h = \{w: \bar{\omega}_h \rightarrow \mathbb{R}\}$$

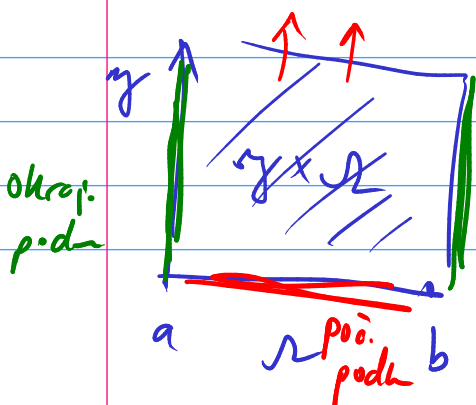
$$= g \Big|_{\bar{z}^{At} \times \gamma_h}$$

pak můžeme rozšířit

$$E(u) = B_h^{At} (P_h^{At} u) - P_h^{At} (Bu) \quad \text{na } \bar{z}^{At} \times \gamma_h$$

$$a \quad E(u) = u_h^{At}(0, \vec{x}) - u_{ini}(0, \vec{x}) = 0 \quad \text{na } \{0\} \times \bar{\omega}_h$$

- Dirichletovy okraj. podmínky  $\Rightarrow B, B_h^{At}$  je identity operator  $\Rightarrow$  pak  $E(u) = 0$  i na  $\bar{z}^{At} \times \gamma_h$



poč. podm = Dirichletova okraj. podm v časoprostorové oblasti  $\gamma \times \bar{J}$

Pozn : konzist. max. norma  $\|u_h^{At}\|_h = \max_{(t, \vec{x}) \in \bar{z}^{At} \times \bar{w}_h} |u_h^{At}(t, \vec{x})| < \max_{k,n} |u_k^n|$

$$= \max_{\bar{z}^{At}} \left( \max_{\bar{w}_h} |u_h^{At}(t, \vec{x})| \right)$$

$$= \max_{\bar{z}^{At}} \|u_h^n(\vec{x})\|_h$$

max norma jen přes prostor  $\mathcal{H}_h$   
norma na  $\mathcal{H}_h$

hde  $u_h^n = u_h^{At}(t^n, \cdot) \in \mathcal{H}_h$  ;  $\bar{w}_h \rightarrow \mathbb{R}$

DEF : Numerické schéma  $L_h u_h^{At} = f_h^{At}$  je STABILNÍ,

právě když existuje množina  $\mathcal{A} = \{(\Delta t, h) | \dots\} \subset \mathbb{R}^2$  taková, že

↑ oblast stability (stability region)

1)  $(0,0)$  je hraničním bodem  $\mathcal{A}$

2)  $\forall (\Delta t, h) \in \mathcal{A} \quad \forall \phi \in \mathcal{H}_h^{At}$  má úloha

$$L_h u_h^{At} = \phi$$

$$B_h u_h^{At} = g_h^{At} \quad \text{obřej. p.}$$

$$u_h^0 = u_{h,ini} \quad \text{poč. p.}$$

}

\*

jednoznačné řešení (označme ho  $u_{h,\phi}^{At}$ )

3) Existuje konst  $k > 0$  tak, že  $\forall (\Delta t, h) \in \mathcal{A}, \forall \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{H}_h^{At}$

$$\|u_{h,\phi_1}^{At} - u_{h,\phi_2}^{At}\|_h \leq k \|\phi_1 - \phi_2\|_h^{At}$$

hde  $\|\cdot\|_h^{At}$  je konzist. norma

(Laxova - Richtmyerova věta o ekvivalenci)  
VĚTA (Laxova) Necht'  $v$  **(\*\*)** je  $L_h^{At}$  LINEÁRNÍ

diferenční operátor,  $\phi$  necht' nezdíví na  $u_h^{At}$ .  
 Necht' **(\*)** má jediné řešení a  $L_h^{At}$  aproximuje  $L$   
 s řádem přesnosti  $O(h^p + \Delta t^q)$   $p, q > 0$

Potom diferenční schéma **(\*\*)** je stabilní  $\Leftrightarrow$  je konvergentní!

Rád konvergence je tedy  $O(h^p + \Delta t^q)$ . **( $\Rightarrow$ )** - DK

**(DK)** pro Dirichletovú okraj. podm.

převodní PDR:  $Lu = f$   $\xrightarrow{\text{lin.}} \text{nezdíví na } u$   $\searrow$  projekce na síť

$$\bullet P_h^{At}(Lu) = P_h^{At} f$$

**(\*\*)** :  $\bullet L_h^{At} u_h^{At} = \phi = \underline{P_h^{At} f}$  je projekce  $f$  na síť

odečeme  $P_h^{At}(Lu) - L_h^{At} u_h^{At} = 0$

$$P_h^{At}(Lu) - L_h^{At}(P_h^{At} u) + L_h^{At}(P_h^{At} u) - L_h^{At} u_h^{At} = 0$$

-  $E(u)$  důle doprava  $\downarrow$   $L_h^{At}$  je lin.

chyba aproximace  
dif. op.

$$L_h^{At} \left( \underbrace{P_h^{At} u - u_h^{At}} \right) = E(u) \quad \text{**(#)**}$$

$e_h^{At}$  ... glob. chyba num. řeš.

**(#)** je úloha pro  $e_h^{At}$  s nulovými Dirichletovými  
 okrajovými podmínkami a nulovou poč. podm.



$$\text{stabilita} \quad \left\| U_{h,\phi_1}^{At} - U_{h,\phi_2}^{At} \right\|_h \leq K \left\| \phi_1 - \phi_2 \right\|_h^{At}$$

zvolne  $\phi_1 = E(u), \quad \phi_2 = 0$

$$\Updownarrow \\ U_{h,\phi_1}^{At} = e_h^{At}$$

$$\Updownarrow \\ U_{h,\phi_2}^{At} = 0$$

lin. dif. op.  $L_h^{At}$ , nulová p.s.  $\phi_2 = 0$   
 a nulové Dir. okraj. podm  
 a nulové poč. podm

$$\left\| e_h^{At} \right\|_h^{At} \leq K \left\| E(u) \right\|_h^{At} = (K) O(h^p + \Delta t^q)$$

$(\frac{h}{\Delta t}) \rightarrow 0 \Rightarrow \left\| e_h^{At} \right\|_h^{At} \rightarrow 0 \Rightarrow \text{konvergence}$

VĚTA : Necht' jsou splněny body (1), (2) v def. stability, udt' schéma

$$L_h^{At} u_h^{At} = f_h^{At} \quad (*)$$

je lineární.

Necht'  $\exists C, 0 > 0$  tak, že  $\forall (At, h) \in \mathcal{A} \quad \forall f_h^{At} \in \mathcal{Z}_h^{At}$

platí  $\left\| u_h^n \right\|_h \leq C \left\| u_h^0 \right\|_h + \underbrace{Dn \Delta t}_{t^n} \left\| f_h^{At} \right\|_h^{At} \quad \forall n = 1, \dots, N$

Potom schéma (\*) je stabilní

(Dk):

Necht'  $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{Z}_h^{At}$ . Pak  $L_h^{At} u_{h,\phi_1}^{At} = \phi_1$   
 $L_h^{At} u_{h,\phi_2}^{At} = \phi_2$  } odečteno

ozeň.  $\varepsilon_h^{At} = u_{h,\phi_1}^{At} - u_{h,\phi_2}^{At}$   $\left\| \phi_1 - \phi_2 \right\|_h^{At}$

$\Rightarrow L_h^{At} \varepsilon_h^{At} = \phi_1 - \phi_2$  kde  $\varepsilon_h^0 = 0$

Pak:  $\left\| \varepsilon_h^{At} \right\|_h^{At} \leq \tilde{K} \max_n \left\| \varepsilon_h^n \right\|_h \leq \tilde{K} \max_n Dn \Delta t \left\| \phi_1 - \phi_2 \right\|_h^{At} \leq \tilde{K} D \underbrace{t}_{\max} \left\| \phi_1 - \phi_2 \right\|_h^{At}$

Uvažujme rovnici  $Lu=0$  a schéma  $L_h^{AT} u_h^{AT} = 0$ ,

lineární, BÜNO jen v 1D

$$u_k^{n+1} = u_k^n + (\dots)$$

DEF:  $L_h^{AT} u_h^{AT} = 0$  je pozitivní  $(\Rightarrow) u_k^{n+1} = \sum_{p \in S_k} a_{p,k} u_{k+p}^n$  ... viz \*

$$\left( L_h^{AT} u_h^{AT} \right)_k^n = \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} + \dots$$

prostorové diference  $\rightarrow$

$$\wedge a_{p,k} \geq 0 \quad \forall p \in S_k$$

VĚTA: Jestliže  $Lu$  obsahuje jen derivace  $u$ , pak každé pozitivní schéma je konvergentní.

(Dk):

• koef u  $u_{k+p}^n$  v dif. náhradě každé derivace jsou v rovnici rovný 0 ... viz 1. řádek matice v odvaze u diferencíálních náhrad

$$\Rightarrow \sum_{p \in S_k} a_{p,k} = 1 \quad (\forall k \dots \text{viz } *)$$

zvolne maximum normu  $\| \cdot \|_h^{AT}$

Potom:  $\| u_h^{n+1} \|_h = \max_k |u_k^{n+1}| = \max_k \left| \sum_{p \in S_k} a_{p,k} u_{k+p}^n \right| \leq$

$$\leq \max_k \sum_{p \in S_k} |a_{p,k}| |u_{k+p}^n| \leq \max_k \sum_{p \in S_k} |a_{p,k}| \left( \max_j |u_j^n| \right)$$

$$\leq \max_k \underbrace{1 \cdot \|u_h^n\|_h}_{\text{nezávislost na } k} = \|u_h^n\|_h$$

$\uparrow$  analogicky lze pokračovat:  $\leq \dots \|u_h^{n+1}\|_h \leq \dots \leq \|u_h^0\|_h$

$\uparrow$  z pozitivity  $\sum |a_{p,k}| = \sum a_{p,k} = 1$

max  $\Rightarrow$  princip  $\Rightarrow$  stabilita  $\Rightarrow$  konvergence.  
LAX

\* závislost na  $k$  znamená, že numerické řešení nemusí být nativně stejné ve všech uzlech sítě; např. u krajů může být přizpůsobeno kvůli zachování řádu přesnosti

## SCHEMA UPWIND PRO ROVNICI $\partial_t u + a \partial_x u = 0$

pro obecné  $a$ : def.  $a_+ = \max(a, 0)$   
 $a \in \mathbb{R}$ , konst.  $a_- = \min(a, 0)$

$$\Rightarrow \vec{\partial}_t u_h^{At} + a_+ \overleftarrow{\partial}_x u_h^{At} + a_- \vec{\partial}_x u_h^{At} = 0$$

$$\text{tj.} \quad \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} + a_+ \frac{u_k^n - u_{k-1}^n}{\Delta x} + a_- \frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{\Delta x} = 0$$

Pozn:

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \Leftrightarrow \partial_t u + \underbrace{f'(u)} \partial_x u = 0$$

$$a_+(u) = \max(f'(u), 0)$$

$$a_-(u) = \min(f'(u), 0)$$

## Stabilita (a t<sub>k</sub> p<sub>o</sub>dem konvergence) upwind schématu

1) pozitivita:  $a > 0$

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} a (u_k^n - u_{k-1}^n)$$

$$= u_k^n \underbrace{\left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} a\right)}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{\Delta t}{\Delta x} a}_{> 0} u_{k-1}^n$$

vždy

pokud  $a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$

stajne jako CFL ... ale ted' mame  
i postačující podmínku

## 2) Von Neumannova spektrální analýza stability

$$\partial_t u + a \partial_x u = 0 \quad \text{s periodickými okrajovými podmínkami}$$

$$\Omega = (c, d) \subset \mathbb{R}$$

$$u(t, c) = u(t, d)$$

DEF: Diferenciální schéma  $L_h^{At} u_n^{At} = f_n^{At}$  se nazývá **JEDNOKROKOVÉ**  $\Leftrightarrow$  **síťová funkce**  $\left( L_h^{At} u_n^{At} \right)^n$

je závislá pouze na  $u_n^n$  a  $u_n^{n+1}$ , resp.  $u_n^{n-1}$  a  $u_n^n$ .

POZ: Jednokrokové lin. schéma je ve tvaru

$$u_n^{n+1} = A u_n^n + \Delta t f_n^n \quad \text{explicitní}$$

$$B u_n^{n+1} = A u_n^n + \Delta t (C f_n^n + D f_n^{n+1}) \quad \text{implicitní}$$

Uvažujme (BUNO) explicitní schéma dle  $\Delta t$  s nulovou pravou stranou ve tvaru

$u_n^{n+1} = \sum_p a_p u_{k+p}^n \quad \forall \Delta t$

Předpokládáme  $\Omega = (c, d) \subset \mathbb{R}$ ,  $x_k = c + k \Delta x$ ,  $t^n = n \Delta t$

$$L = d - c$$

$$\Delta x = \frac{L}{m}$$

$$k = 0, \dots, m; \quad n = 0, \dots, N$$

Uvažujme  $u_{ini}(x) \in C(\Omega)$

$$\tilde{u}_{ini}(x) = \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l \exp\left(\frac{2\pi i l x}{L}\right) \quad c_l = \frac{2}{L} \int_c^d u_{ini}(x) \exp\left(\frac{2\pi i l x}{L}\right) dx$$



$$u_{ini} = \sum_{l=1}^{+\infty} c_l e^{i l x} \quad \|u_{ini}\|_{L^2(\Omega)} = \left\| \sum_{l=1}^m c_l e^{i l x} \right\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \dots$$

poč. podm. pro num. řešení

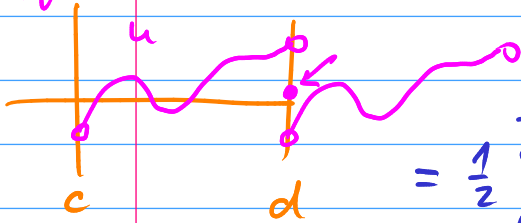
$$u_k^0 = u_{ini}(x_k)$$

⇓

$$u_k^0 = \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} C_l \exp\left(\frac{2\pi i l (c - k\Delta x)}{L}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} C_l \exp\left(\frac{2\pi i l c}{L}\right) \exp\left(i l k \frac{2\pi \Delta x}{L}\right)$$

holyby  $u(c) \neq u(d)$



$$= \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \tilde{C}_l \exp(\alpha i l k)$$

$$\exp(\alpha i l k) \quad \alpha = \frac{2\pi \Delta x}{L}$$

Pokud jsou splněny tzv. periodické okraj. podm.  $u(c) = u(d)$

$$u_0^n = u_m^n$$

⇒ 1) rozvoj platí i v krajních bodech

⇒ 2) řešení (#) platí  $\forall k = 0, \dots, m$

$$u_k^1 = \sum_p a_p u_{k+p}^0 = \sum_p a_p \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \tilde{C}_l \exp(\alpha i l (k+p)) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \tilde{C}_l \underbrace{\sum_p a_p \exp(\alpha i l p)}_P \exp(\alpha i l k)$$

$\lambda(\alpha l)$  ... zesilující (amplifikační) faktor

$$\Rightarrow u_k^n = \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \tilde{C}_l \lambda^n(\alpha l) \exp(\alpha i l k)$$

$\theta := \alpha l \in \mathbb{R}$  pro různé  $\Delta x, L$

POTOM:  $|\lambda(\theta)| \leq 1$  pro  $\forall \theta \in \mathbb{R} \Rightarrow u_k^n$  je omezená  $\forall k, \forall n$

$$\Rightarrow \|u_k^n\|_n \leq C \|u_0^0\|_n$$

⇒ stabilita ⇒ konvergence

•  $\exists \theta$  tak, že  $|\lambda(\theta)| > 1 \Rightarrow u_k^n$  roste nade všechny meze pro  $\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow$  nekonzvergence

Zpět k upwind schématu:

do schématu:  $u_k^{n+1} = u_k^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x} (u_k^n - u_{k-1}^n)$  pro  $a > 0$

dosadíme  $u_k^n = \underline{c} \exp(ik\theta)$  kde  $\theta \in \mathbb{R}$

$\tilde{c}_0 \lambda^n(\theta) \quad \tilde{c}_0 \lambda^{n+1}(\theta) = c \lambda(\theta)$

$u_k^{n+1} = \exp(ik\theta) - \frac{a\Delta t}{\Delta x} (\exp(ik\theta) - \exp(i(k-1)\theta))$

$= \exp(ik\theta) \left[ \left(1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x}\right) + \frac{a\Delta t}{\Delta x} \exp(-i\theta) \right]$

ozn.  $\sigma := \frac{a\Delta t}{\Delta x}$

$\lambda(\theta)$

$\Rightarrow \lambda(\theta) = 1 - \sigma(1 - e^{-i\theta}) = \underbrace{1 - \sigma(1 - \cos\theta)}_{\text{Re } \lambda(\theta)} - i \underbrace{\sigma \sin\theta}_{-\text{Im } \lambda(\theta)}$

$|\lambda(\theta)|^2 = (1 - \sigma(1 - \cos\theta))^2 + \sigma^2 \sin^2\theta$

$= ((1 - \sigma) + \sigma \cos\theta)^2 + \sigma^2 \sin^2\theta$

$= (1 - \sigma)^2 + 2(1 - \sigma)\sigma \cos\theta + \sigma^2$

$= 1 - 2\sigma + 2\sigma^2 + 2(1 - \sigma)\sigma \cos\theta$

$= 1 - 2\sigma(1 - \sigma)(1 - \cos\theta)$

$\underbrace{> 0}_{\geq 0} \quad \underbrace{\geq 0}_{\geq 0} \quad \underbrace{\leq 1}_{\leq 1}$

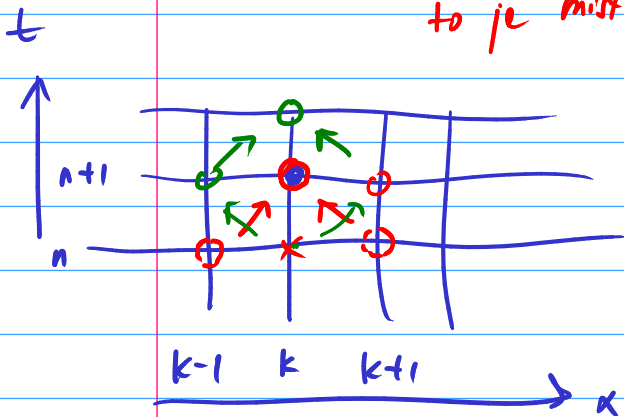
$\Rightarrow \sigma \leq 1 \Rightarrow \frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1$

LAXOVO - FRIEDRICHSOVO SCHEMA pro  $\partial_t u + a \partial_x u = 0$

$$u_k^{n+1} = \frac{1}{2} (u_{k-1}^n + u_{k+1}^n) - \frac{a \Delta t}{2 \Delta x} (u_{k+1}^n - u_{k-1}^n)$$

to je místo  $u_k^n$

$$\frac{1}{2 \Delta x} (u_{k+1}^n - u_{k-1}^n) = [\overset{\leftrightarrow}{\partial_x} u]_k^n$$



prepíseme

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \frac{a \Delta t}{2 \Delta x} (u_{k+1}^n - u_{k-1}^n) + \frac{\Delta x^2}{2 \Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{k-1}^n - 2u_k^n + u_{k+1}^n)$$

$$\overset{\rightarrow}{\partial_t} u_n^{\Delta t} = -a \overset{\leftrightarrow}{\partial_x} u_n^{\Delta t} + \mu_{num} \overset{\rightarrow}{\partial_x} \overset{\leftarrow}{\partial_x} u_n^{\Delta t}$$

aprox.  $\partial_x u$   
2. řádu

$\partial_{xx}$

aproximace  $\partial_{xx} u$   
v bode  $(t^n, x_k)$   
centrální diference

to je aproximace rovnice  
s přesností  $O(\Delta t + \Delta x^2)$

$$\partial_t u + a \partial_x u = \mu_{num} \partial_{xx} u$$

modifikovaná rovnice

$$\mu_{num} = \frac{\Delta x^2}{2 \Delta t} \quad \text{numerická viskozita}$$

LF scheme  $\rightarrow$  MODIFIKOVANE' LF SCHEMA

$$\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{kde } \varepsilon \in \langle 0, 1 \rangle$$

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (u_{k+1}^n - u_{k-1}^n) + \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{k-1}^n - 2u_k^n + u_{k+1}^n)$$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{2}$$

zde

$$\mu_{\text{max}} = \varepsilon \frac{\Delta x^2}{2\Delta t}$$

$\varepsilon = 1 \dots \Rightarrow$  LF scheme

$\varepsilon = 0 \Rightarrow$  explicitni CENTRALNI SCHEMA

STABILITA' POKOCI' VOZ NEUMENNOU ANALIZY  $u_k^n = \exp(ik\theta)$

$$\lambda(\theta) = 1 - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) + \frac{\varepsilon}{2} (e^{-i\theta} - 2 + e^{i\theta})$$

$$= 1 - i \frac{a\Delta t}{\Delta x} \sin \theta - \varepsilon (1 - \cos \theta)$$

$$|\lambda(\theta)|^2 = [1 - \varepsilon(1 - \cos \theta)]^2 + \left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2 \theta$$

$$= 1 - 2\varepsilon(1 - \cos \theta) + \varepsilon^2(1 - \cos \theta)^2 + \left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2 \theta$$

pro  $\theta = 2k\pi$  maime  $|\lambda(\theta)|^2 = 1$

restne  $1 \geq |\lambda(\theta)|^2$  ked'i  $\theta \neq 2k\pi \dots$   $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = (1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)$

$$2\varepsilon(1 - \cos \theta) \geq \varepsilon^2(1 - \cos \theta)^2 + \left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2 \theta \quad \Bigg| \cdot \frac{1}{1 - \cos \theta}$$

$$2\varepsilon \geq \varepsilon^2(1 - \cos \theta) + \left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)^2 (1 + \cos \theta)$$

$\theta \neq 2k\pi$  ✓

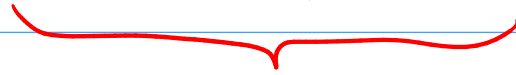
$$z = \cos \theta$$

||





$$2\varepsilon \geq \varepsilon^2(1-z) + \left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)^2(1+z) \quad \forall z \in \langle -1, 1 \rangle$$



lin. fce  $z \Rightarrow$  hodnoty min./max u  $z = \pm 1$

$$z=1: \quad 2\varepsilon \geq 2\left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)^2$$



$$z=-1: \quad 2\varepsilon \geq 2\varepsilon^2$$

$\varepsilon \geq \varepsilon^2$ , což platí  $\forall \varepsilon \in \langle 0, 1 \rangle$ .

(pouze takové uvažujeme)

$\Rightarrow$  konvergence mod. LF schémata je  $\Leftrightarrow \boxed{\frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq \sqrt{\varepsilon}}$

$$\mu_{\text{num}} = \varepsilon \frac{A\kappa^2}{2A\tau} \approx \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \dots \text{pokud } \frac{a\Delta t}{\Delta x} = \sqrt{\varepsilon}$$

$$\mu_{\text{num}} = \sqrt{\varepsilon} \frac{a}{2\Delta x} \Rightarrow \begin{cases} \text{num. vlnová} \\ \text{velikost } \varepsilon \rightarrow 0 \\ \text{a to } \varepsilon \text{ s } \Delta x \rightarrow 0 \end{cases}$$

Důsledky:  $\varepsilon = 1$

$\frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \dots$  LF řešení ke stejnosti podm. konug jako upwind

$\varepsilon \in (0, 1) \dots$  ubíráme num. difuzi  $\Rightarrow$  zpřesňuje se podmínka na čar krek

$\varepsilon = 0 \dots$  podm. konug. NĚJDE NIKDY splnit

$\Rightarrow$  explicitní centrální schéma JE  
NEPODMÍNĚNĚ NESTABILNÍ

## IMPLICITNI' EULEROVO SCHEMA

$$\overleftarrow{\delta}_t u_h^{At} + a \overleftrightarrow{\delta}_x u_h^{Ax} = 0$$

$$\left( \overleftarrow{\delta}_t u_h^{At} + a \overleftrightarrow{\delta}_x u_h^{Ax} \right)_k^n = \frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\Delta t} + a \frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad \dots \text{soustava li. rovnice}$$

pro neznaný vektor  $u_h^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ \vdots \\ u_{m-1}^n \end{pmatrix}$

$$\left( \overleftarrow{\delta}_t u_h^{At} + a \overleftrightarrow{\delta}_x u_h^{Ax} \right)_k^{n+1} = \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} + a \frac{u_{k+1}^{n+1} - u_{k-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0$$

s 3-diag. maticí

"+" je nově oprávněno explicit. centrálním schématu

$\theta = \alpha \Delta t \in \mathbb{R}$

$$u_k^n = e^{ik\theta} \quad u_k^{n+1} = \lambda(\theta) e^{ik\theta}$$

dosaďme:  $\frac{1}{\Delta t} (\lambda(\theta) - 1) e^{ik\theta} + \frac{a}{2\Delta x} \lambda(\theta) (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) e^{ik\theta} = 0 \quad \cdot \Delta t$

ozn.  $\sigma = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$

$$\lambda(\theta) - 1 + \frac{\sigma}{2} \lambda(\theta) (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = 0$$

$$= \lambda(\theta) - 1 + \lambda(\theta) \sigma i \sin \theta = 0$$

$$\lambda(\theta) = \frac{1}{1 + i\sigma \sin \theta}$$

$$\Rightarrow |\lambda(\theta)| = \frac{1}{|1 + i\sigma \sin \theta|} \leq 1$$

$\Rightarrow$  IMPLIC. SCHEMA JE NEPODMÍNĚNĚ STABILNÍ

POZN : explicitní řešení

At můžeme zjednodušit s AX  
více snadných časových kroků  
snadná, flexibilní a efektivní  
paralelizace

implicitní řešení

At nezávisle na Δx  
méně náročnějších časových  
kroků

paralelizace : tak dobře,  
jách dobře se dá paralelizovat  
řešení soustavy lin. rovnic

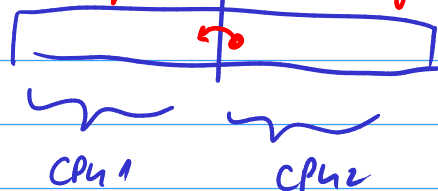
Průběh : upwind pro a > 0 :

```
#pragma omp parallel for OPEUMP
for (k=1; k<m; k++)
    u_new[k] = u[k] + (Δt/Δx) * (u[k-1] - u[k]);
```

1 časový  
krok

$u_k^{n+1}$   
 $u_k^n$

posílání zpráv na 2 strojích (MPI)



SCHEMATA KONČNÝCH DIF. PRO ROVNICI VEDENÍ TEPLA

1D :  $\partial_t u = \lambda \partial_{xx} u$

2D, 3D :  $\partial_t u = \lambda \Delta u$  poč. podmín  $u|_{t=0} = u_{ini}$

r-D :  $\partial_t u = \lambda \sum_{j=1}^r \partial_{j,j} u$  okraj podm  $u|_{\partial\Omega} = 0$

\* ) pokud  $\lambda = \lambda(x)$   $\Rightarrow \partial_t = \partial_x (\lambda \partial_x u)$  <sup>teplota</sup>

v 1D ... centrální explicitní schéma

$$\left( \overleftrightarrow{\delta}_{xx} u_h^{At} \right)_k = \frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{\Delta x^2}$$

$$\overrightarrow{\delta}_t u_h^{At} = \lambda \overleftrightarrow{\delta}_{xx} u_h^{At}$$

v r-D 
$$\overrightarrow{\delta}_t u_h^{At} = \lambda \sum_{j=1}^r \overleftrightarrow{\delta}_{x_j x_j} u_h^{At}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \partial_{x_j} u = \underline{\partial_j} u$$

$$\overleftrightarrow{\delta}_j \equiv \overleftrightarrow{\delta}_{x_j}$$

Pozn: 
$$\overleftrightarrow{\delta}_{xx} u_h^{At} = \overleftrightarrow{\delta}_x \overleftrightarrow{\delta}_x u_h^{At} = \overleftrightarrow{\delta}_x \overleftarrow{\delta}_x u_h^{At}$$

\*) 
$$\overrightarrow{\delta}_t u_h^{At} = \overleftrightarrow{\delta}_x (\lambda \overleftrightarrow{\delta}_x u_h^{At})$$

Nebo: 
$$\partial_x (\lambda(x) \partial_x u(x)) = \partial_x \lambda(x) \partial_x u(x) + \lambda(x) \partial_{xx} u(x)$$

Stabilita schémat v 1D:  $u_k^n = e^{ik\theta}$ ,  $u_k^{n+1} = \lambda(\theta) e^{ik\theta}$

$$u_k^{n+1} = u_k^n + \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2} (u_{k-1}^n - 2u_k^n + u_{k+1}^n)$$

Pozn: Stabilita a konvergence díky pozitivitě

bu: ověřit řadu přetvořit centrální dif. úchřady

$$1 - \frac{2\lambda \Delta t}{\Delta x^2} \geq 0$$

$$\frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\lambda(\theta) = 1 + \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2} (e^{-i\theta} - 2 + e^{i\theta})$$

$$= 1 + 2 \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2} (\cos \theta - 1) \dots \text{reálné číslo}$$

$$|\lambda(\theta)| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 1 + 2 \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2} (\cos \theta - 1) \leq 1$$

$\forall \theta \in \mathbb{R}$

$$-2 \leq 2 \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2} (\cos \theta - 1) \leq 0$$

(=)  $\theta \neq 0$  oplámeno vědy

$$-2 \leq -2 \cdot 2 \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}}$$

$\Delta t$  klád jako  $\Delta x^2$   
 $\Rightarrow$  může být výhodné použít implicit. schéma

Dů: ukázat, že implicitní centrální schéma

$$\overset{\leftarrow}{\Delta}_t u_h^{\Delta t} = \lambda \overset{\leftrightarrow}{\Delta}_{xx} u_h^{\Delta t}$$

je nepodmíněně stabilní

Stabilita explicit. schémat v  $r=1$  ...  $\Omega = (0,1)^r$

každý "mód"  $r$ -rozměrné Fourierovy řady má tvar

$$u_{k_1, k_2, \dots, k_r}^n = e^{ik_1 \theta_1} e^{ik_2 \theta_2} \dots e^{ik_r \theta_r} = \prod_{j=1}^r e^{ik_j \theta_j}$$

$\theta_j = \frac{\Delta x_j}{2\pi}$

$$u_{k_1, k_2, \dots, k_r}^{n+1} = \lambda(\theta_1, \dots, \theta_r) \prod_{j=1}^r e^{ik_j \theta_j}$$

10:

$$\lambda(\theta) = 1 + \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2} (e^{-i\theta} - 2 + e^{i\theta})$$

$$= 1 + 2 \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2} (\cos \theta - 1)$$

↓ po dosazení do  $r$ -rozměrného dif. schématu

$$\lambda(\theta_1, \dots, \theta_r) = 1 + \sum_{j=1}^r 2 \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x_j^2} (\cos \theta_j - 1)$$

$$|\lambda(\theta_1, \dots, \theta_r)| \leq 1 \quad \forall (\theta_1, \dots, \theta_r) \in \mathbb{R}^r$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq -2 \cdot \sum_{j=1}^r \frac{2\lambda \Delta t}{\Delta x_j^2} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^r \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x_j^2} \leq \frac{1}{2}$$

pro pravidelnou síť z hyperkrychliček :  $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_r = h$   
o straně  $h$

$$\frac{\lambda \Delta t}{h^2} \leq \frac{1}{2r}$$

Napr. v 3D když zjemníme z rozlišení  $\frac{1}{h}$  na  $\frac{2}{h}$ , tak :

- síť bude mít  $2^3$ -krát více uzlů
- časový krok bude potřeba  $2^2$ -krát více

$\Rightarrow$  celkem  $2^5$ -krát více operací  $(2^5 = 32)$

$\Rightarrow$  celkem  $2^3$ -krát více paměti

Pozn : advekční vs. difuzivně dominované úlohy  
(NS rovnice pro vazké proudění)

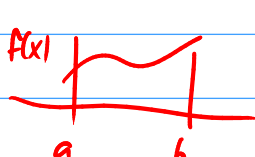
- rychlost proudění vs. viskozita
- numerická viskozita
- turbulentní viskozita

## KLASICKÁ SCHÉMATA METODY KONČNÝCH DIFERENCÍ

Schéma Cranka a Nicolsonové

$$u(t_{n+1}, x) = u(t_n, x) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \partial_t u(t, x) dt = u(t_n, x) + \frac{\Delta t}{2} \left( \partial_t u(t_{n+1}, x) + \partial_t u(t_n, x) \right) + O(\Delta t^3)$$

$f(\xi) + \underbrace{O(L^2)} \quad \underbrace{O(L)}$



$$\int_a^b f(x) dx = \frac{f(a) + f(b)}{2} \cdot (b-a) + O(L^2) \quad \text{Lichoběžňukové pravidlo}$$

$L = b - a$

$\Rightarrow$  pro rovnici  $\partial_t u = \underbrace{L_x u}_{\text{prostorová derivace}} \quad (L_x \text{ je dif. op. v prostorových sour.})$

$$\left( \overset{\rightarrow}{\partial_t} u_h^{at} \right)_h^n = \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left( \underbrace{L_h u_h^n}_{\substack{\text{dif. schéma} \\ L_x u \\ \text{v čase } t_n}} + \underbrace{L_h u_h^{n+1}}_{\substack{\text{---} \\ \text{v čase } t_{n+1}}} \right) \quad L_h \dots \text{diferenční op. v prostor. sour.}$$

Např. pro rovnici vedení tepla:

$$\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} = \lambda \cdot \frac{1}{2} \left( \overset{\leftarrow}{\partial_{xx}} u_h^n + \overset{\rightarrow}{\partial_{xx}} u_h^{n+1} \right)$$

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} = \lambda \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{u_{k-1}^n - 2u_k^n + u_{k+1}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{k-1}^{n+1} - 2u_k^{n+1} + u_{k+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right)$$

(semi) implicitní a nepodmíněně stabilní schéma 2. řádu v čase

a v prostoru je řád stejný jako řád aproximace  $L_x$  operátorem  $L_h$

(pro rovnici vedení tepla také 2. řád)

# SCHEMA MKO PRO VLNOVOU ROVNICI

$$\partial_{tt} u = c^2 \partial_{xx} u \quad \dots \quad a \partial_{xx} u + 2b \partial_{xy} u + c \partial_{yy} u + \dots = 0$$

1. řád

zde  $t \equiv y$

$$a \equiv c^2$$

$$b \equiv 0$$

$$c \equiv -1$$

$$D = b^2 - ac$$

$$\frac{dy}{dx} = \lambda \quad \text{kde} \quad \lambda = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{a}$$

$$\Rightarrow D = b^2 - ac \equiv c^2 > 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{c} = \frac{dt}{dx}$$

$\Rightarrow$  HYPERBOLICKÁ PDR 2. řád

FDM:

$$\delta_{tt} u_h^{\Delta t} = c^2 \delta_{xx} u_h^{\Delta t}$$

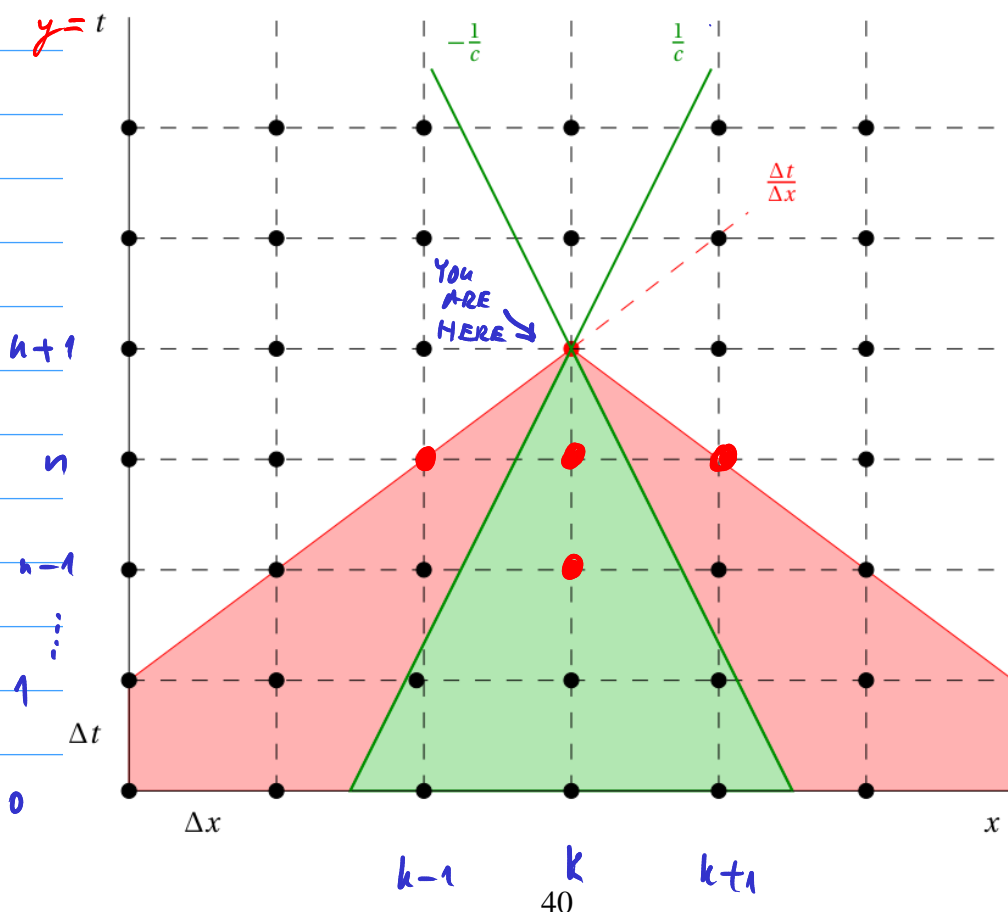
$$\frac{u_k^{n+1} - 2u_k^n + u_k^{n-1}}{\Delta t^2} = c^2 \frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{\Delta x^2}$$

CFL :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{c}$$

nutná  
podmínka  
konvergence

Dů:  
von Neumannova  
analýza





Poč. podm.:  $u|_{t=0} = u_0$   $\partial_t u|_{t=0} = v_0$  + DKRAJ. PODM  
 poč. poloha poč. rýchlosť  $u(a) = u(b) = 0$   
 (pevné konce)

DISKRETIZACE ↓

$$u_h^{At} \Big|_{t=0} = \left( P_h^{At} u \right) \Big|_{t=0}$$

$$u_k^0 = u(0, x_k) = u_0(x_k)$$

$$\vec{\partial_t u_h^{At}} \Big|_{t=0} = P_h^{At} \partial_t u \Big|_{t=0}$$

$$\frac{u_k^1 - u_k^0}{\Delta t} = \partial_t u(0, x_k) = v_0(x_k)$$

⇒ dopóitateľne

$$u_k^1 = u_k^0 + \Delta t v_0(x_k)$$

### LAXOVO-WENDROFFOVO SCHEMA PRO TRANSPORTNÉ ROVNICE

rozvoj  $u(t+\Delta t, x) = u(t, x) + \Delta t \partial_t u(t, x) + \frac{1}{2} \Delta t^2 \partial_{tt} u(t, x) + O(\Delta t^3)$

rovnice  $\partial_t u + a \partial_x u = 0 \Rightarrow \partial_t u = -a \partial_x u$

$$\Rightarrow \partial_{tt} u = \partial_t \partial_t u = \partial_t (-a \partial_x u) = -a \partial_x \partial_t u = -a \partial_x (-a \partial_x u) = a^2 \partial_{xx} u$$

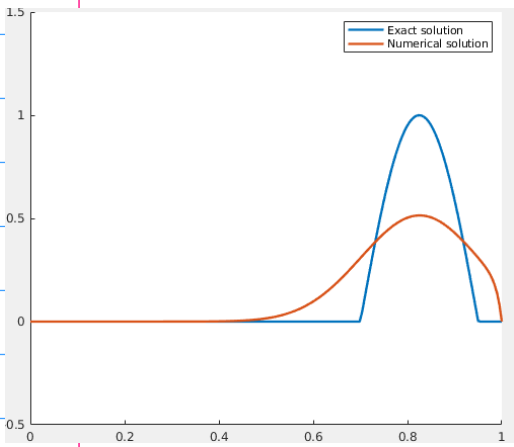
$$\Rightarrow u(t+\Delta t, x) = u(t, x) - \underbrace{a \Delta t \partial_x u(t, x)}_{\partial_t u} + \frac{1}{2} \underbrace{a^2 \Delta t^2 \partial_{xx} u(t, x)}_{\frac{1}{2} \partial_{tt} u} + O(\Delta t^3)$$

$$\frac{u(t+\Delta t, x) - u(t, x)}{\Delta t} = -a \partial_x u(t, x) + \frac{1}{2} a^2 \Delta t \partial_{xx} u(t, x) + O(\Delta t^2)$$

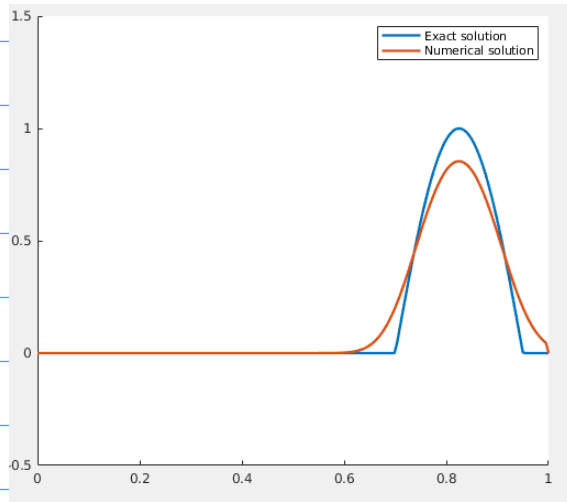
2. řád v prostoru

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} u_h^{At} \right|_{(t^n, x_k)} = -a \overset{\leftrightarrow}{\frac{\partial}{\partial x}} u_h^{At} + \frac{1}{2} a^2 \Delta t \overset{\leftrightarrow}{\frac{\partial^2}{\partial x^2}} u_h^{At} \Big|_{(t^n, x_k)}$$

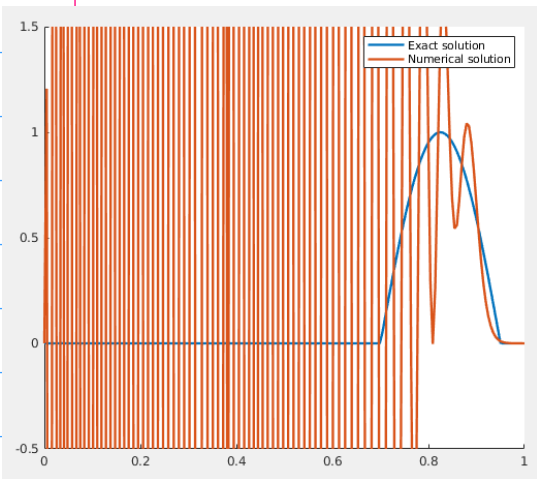
$$u_k^{n+1} = u_k^n - \frac{a \Delta t}{2 \Delta x} (u_{k+1}^n - u_{k-1}^n) + \frac{1}{2} \frac{a^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} (u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n)$$



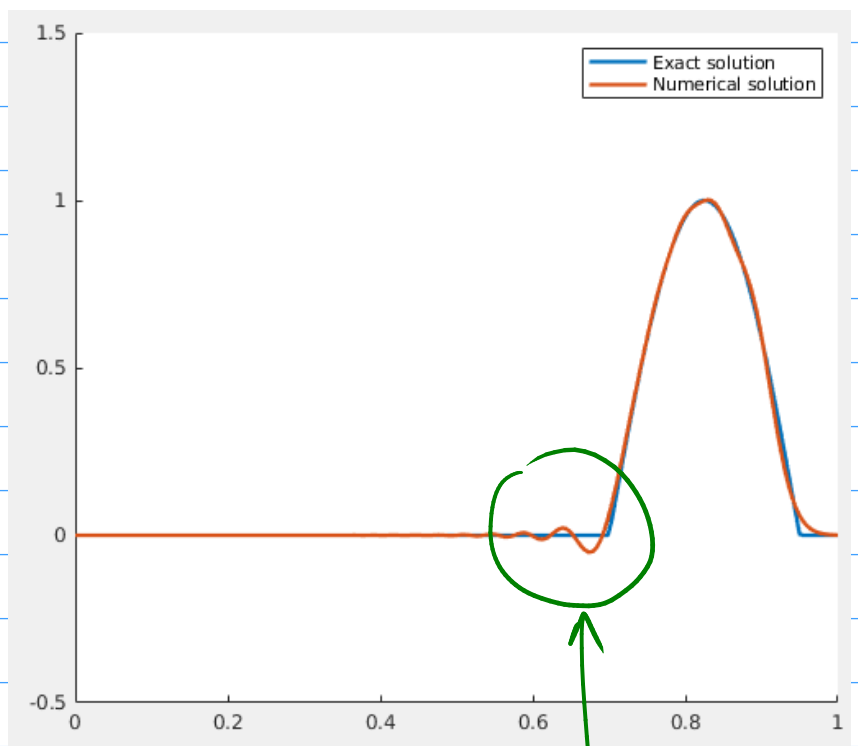
LF ... silni' num.  
difuze



upwind



explicitni' centralni'  
(vždy  
nestabilni')



LW

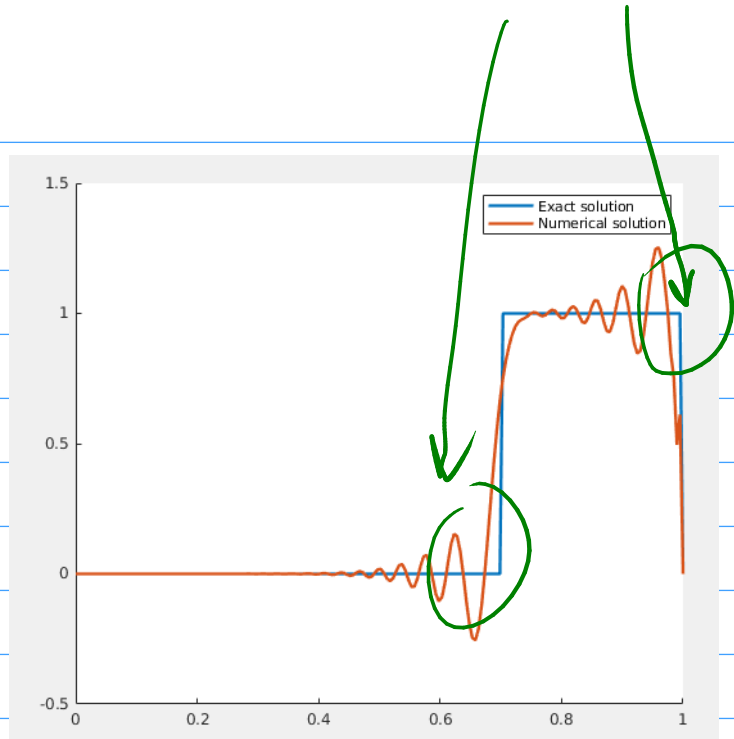
OSCILACE NA NESPOJITOSTECH

• modifikované rovnice  
(viz LF)

obracuje DISPERSIVNÍ  
ČLEN

$$c \cdot \partial_{xxx} u$$

⇒ důvod oscilací



## ŘEŠENÍ (obecně pro schemata vyššího řádu)

### SLOPE LIMITER

$$L_x u_h^{\Delta t} = \underbrace{\phi(\overleftrightarrow{\delta}_x u_h^{\Delta t})}_{\approx 1 \text{ pro malé hodnoty derivací } u} \underbrace{L_x^{(H)} u_h^{\Delta t}}_{\text{dif. op. v prost. s. s vysokým řádem}} + \underbrace{(1 - \phi(\overleftrightarrow{\delta}_x u_h^{\Delta t}))}_{\text{opačné chování}} \underbrace{L_x^{(L)} u_h^{\Delta t}}_{\text{dif. op. v prost. s. s řádem aproximace 1}}$$

$L_x u_h^{\Delta t}$  : diferenciální operátor v prostoru  $u$  souč.  
 $\phi(\overleftrightarrow{\delta}_x u_h^{\Delta t})$  :  $\alpha \rightarrow 0$  pro  $\overleftrightarrow{\delta}_x u_h^{\Delta t} \rightarrow +\infty$   
 $L_x^{(H)} u_h^{\Delta t}$  : dif. op. v prost. s. s vysokým řádem  
 $L_x^{(L)} u_h^{\Delta t}$  : dif. op. v prost. s. s řádem aproximace 1

Pozn : LW schéma pro nelineární úlohu  $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$

$$\text{ozn: } f_k^n := f(u_k^n)$$

$$f'(u) \partial_x u$$

$$\Rightarrow u_k^{n+1} = u_k^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f_{k+1}^n - f_{k-1}^n) + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} (f_{k+1}^n - 2f_k^n + f_{k-1}^n)$$

Pozn : LW schéma lze vyčíslit ve 2 krocích

1) PREDIKTOR

2) KOREKTOR

### 9.7.2.1 Richtmyerova varianta LW schématu

Uvedeme tvar v nelineárním případě. Prediktor je LF schéma pro časový krok  $\Delta t/2$  a prostorový krok  $\Delta x/2$ :

$$u_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (u_{k+1}^n + u_k^n) - \frac{\omega \Delta t}{2\Delta x} (f_{k+1}^n - f_k^n).$$

$u_k^{n+1} - u_k^n \leftarrow$  v lin. případě

Korektor je centrální schéma

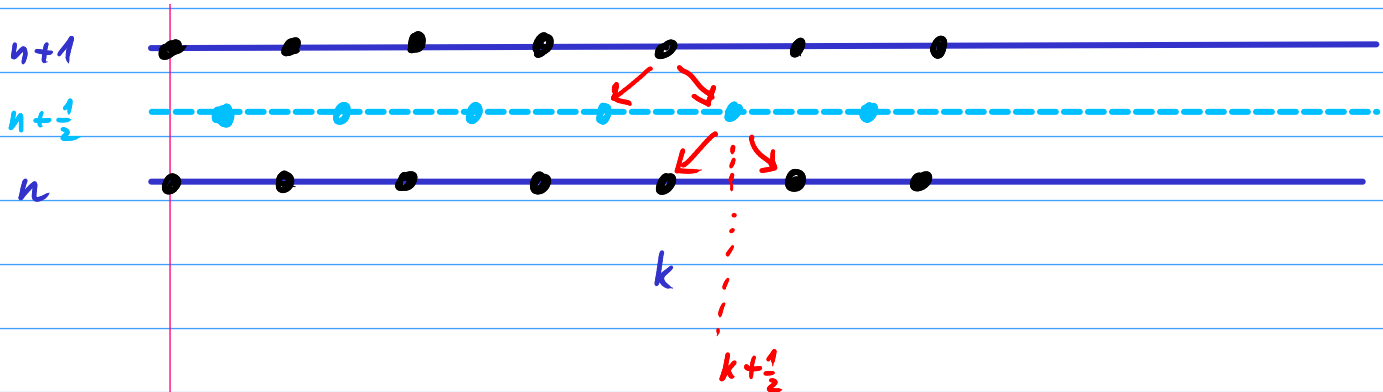
$$u_k^{n+1} = u_k^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - f_{k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}).$$

Lze použít také variantu bez půlení prostorového kroku. Prediktor je potom

$$u_k^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (u_{k+1}^n + u_{k-1}^n) - \frac{\Delta t}{4\Delta x} (f_{k+1}^n - f_{k-1}^n)$$

a korektor

$$u_k^{n+1} = u_k^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - f_{k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}).$$



### 9.7.2.2 McCormackova varianta LW schématu

Prediktor je jednoduché schéma s prostorovou diskretizací dopřednou diferencí

$$u_k^{n+\frac{1}{2}} = u_k^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{k+1}^n - f_k^n)$$

$\vec{\partial}_t^{1/2}$   
 $\vec{\partial}_t^{1/2} u + \vec{\partial}_x f(u_n^{At}) = 0$

a korektor provádí prostorovou diskretizaci zpětnou diferencí. Má tvar

$$u_k^{n+1} = \frac{1}{2} (u_k^n + u_k^{n+\frac{1}{2}}) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - f_{k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}).$$

$\vec{\partial}_x f(u_n^{At})$

pozn : FDM (Lax-Friedrichs) ve 2D pro Eulerovy rovnice

$$\partial_t \vec{W} + \partial_x \vec{F} + \partial_y \vec{G} = \vec{0}$$

vektor nezvaných (konzervativních veličin)  $\begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \end{pmatrix}$

$$\vec{W}_{k,l}^{n+1} = \frac{1}{4} \left( \vec{W}_{k-1,l}^n + \vec{W}_{k+1,l}^n + \vec{W}_{k,l-1}^n + \vec{W}_{k,l+1}^n \right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} \left( \vec{F}_{k+1,l}^n - \vec{F}_{k-1,l}^n \right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} \left( \vec{G}_{k,l+1}^n - \vec{G}_{k,l-1}^n \right)$$

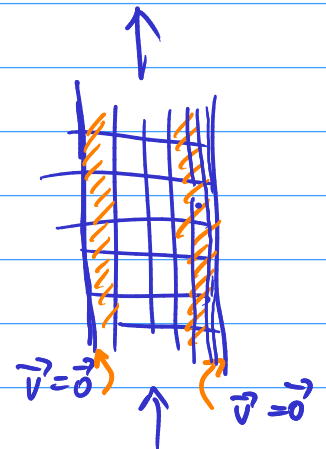
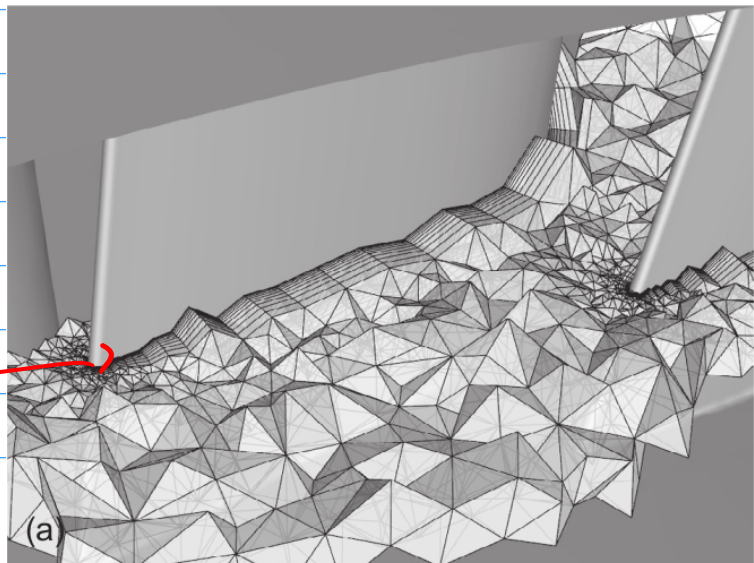
### NESTRUKTOUROVANÉ SÍŤE PRO METODU KONEČNÝCH OBJEMŮ

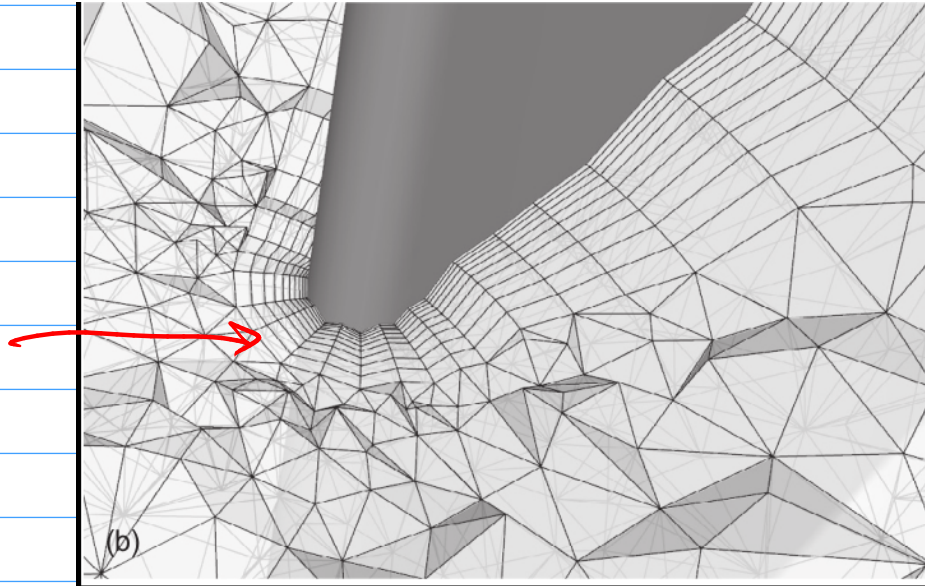
vypočítací oblast  $\Omega$  rozdělíme ve 2D na polygonální  
a ve 3D na polyhedrální buňky

MKO (angl. FVM - finite volume method) aproximuje  
integrály nezvaných veličin přes buňky sítě

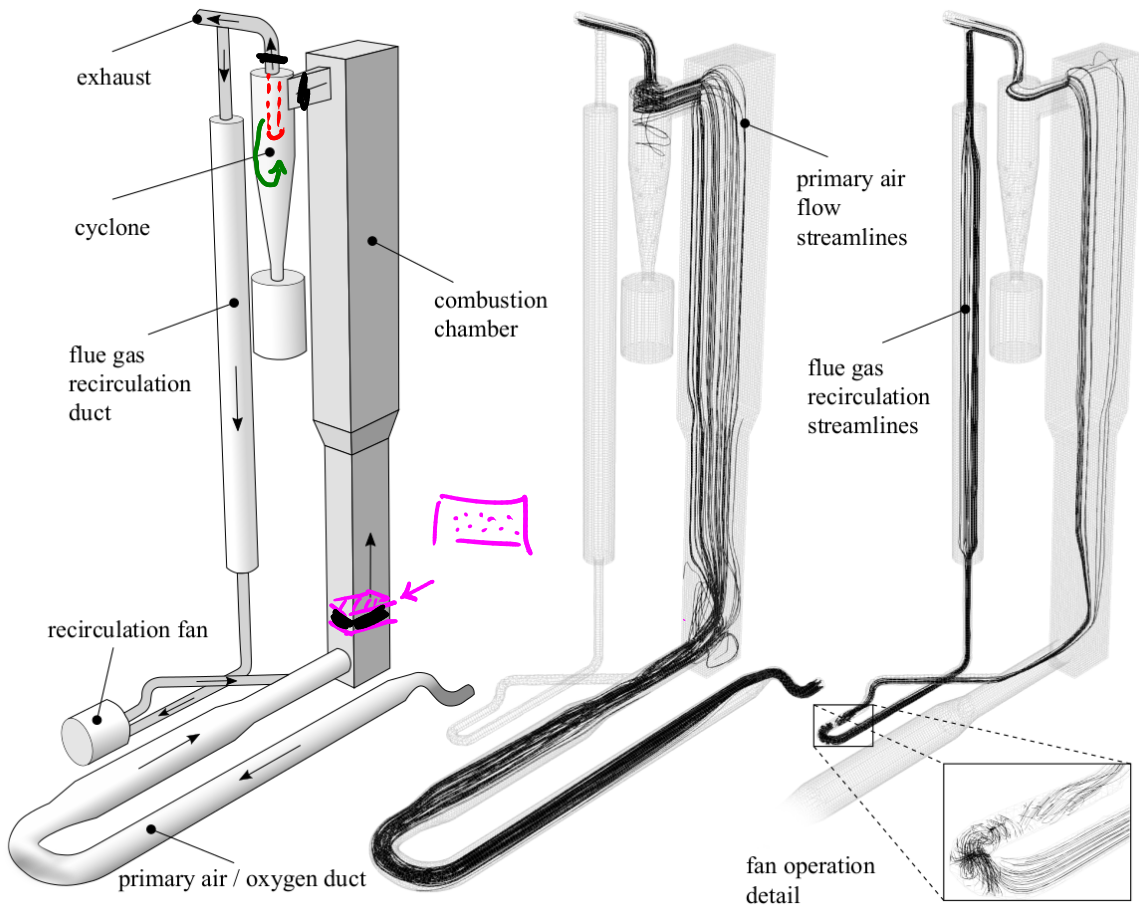
(Pr)

zjemnění  
sítě  
u hranice

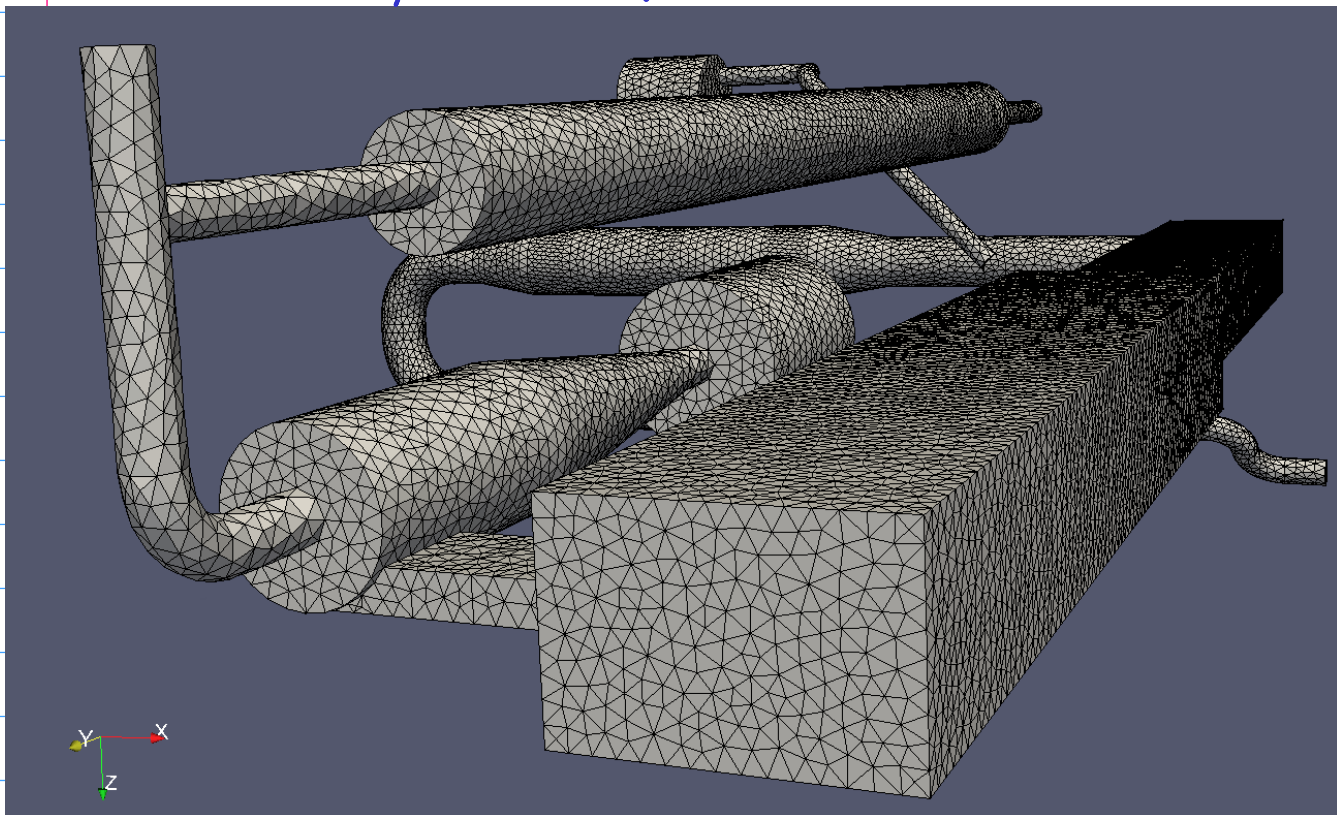




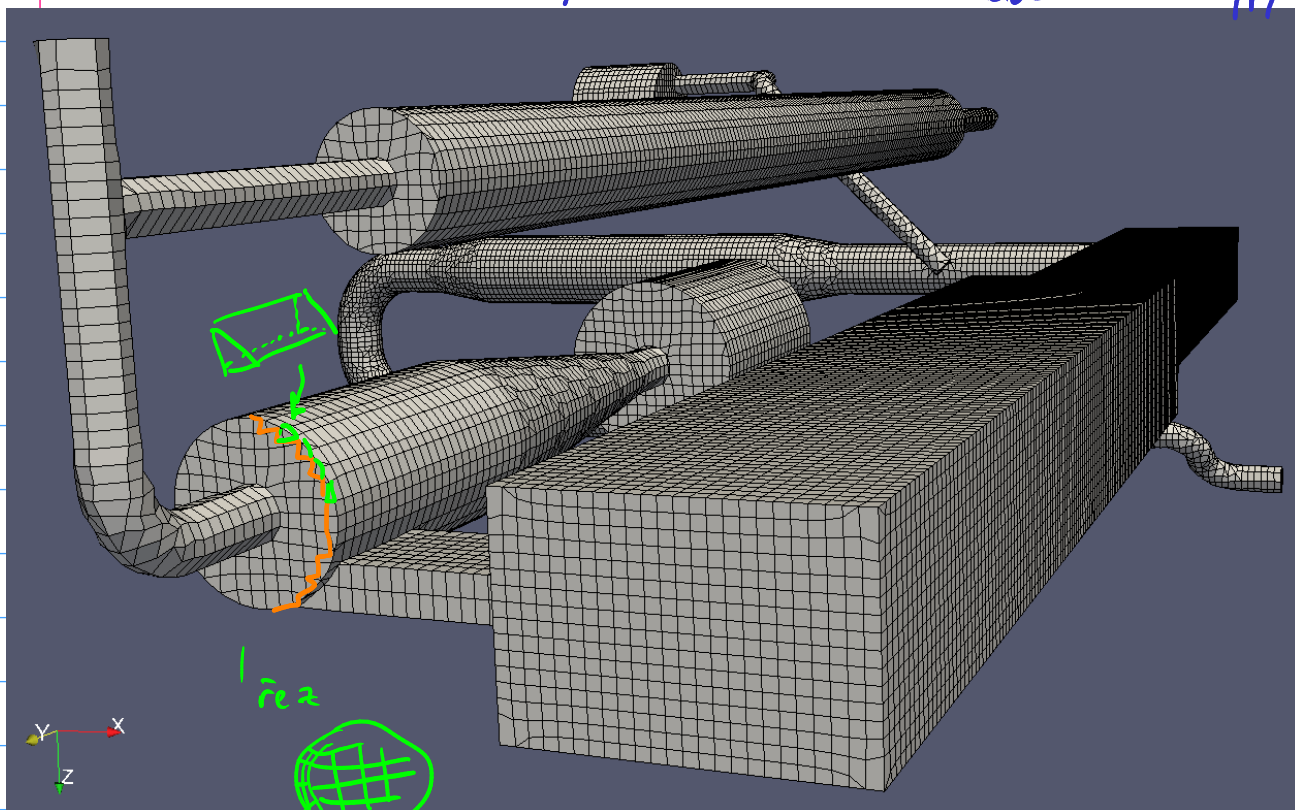
*Př - fluidní kotel*

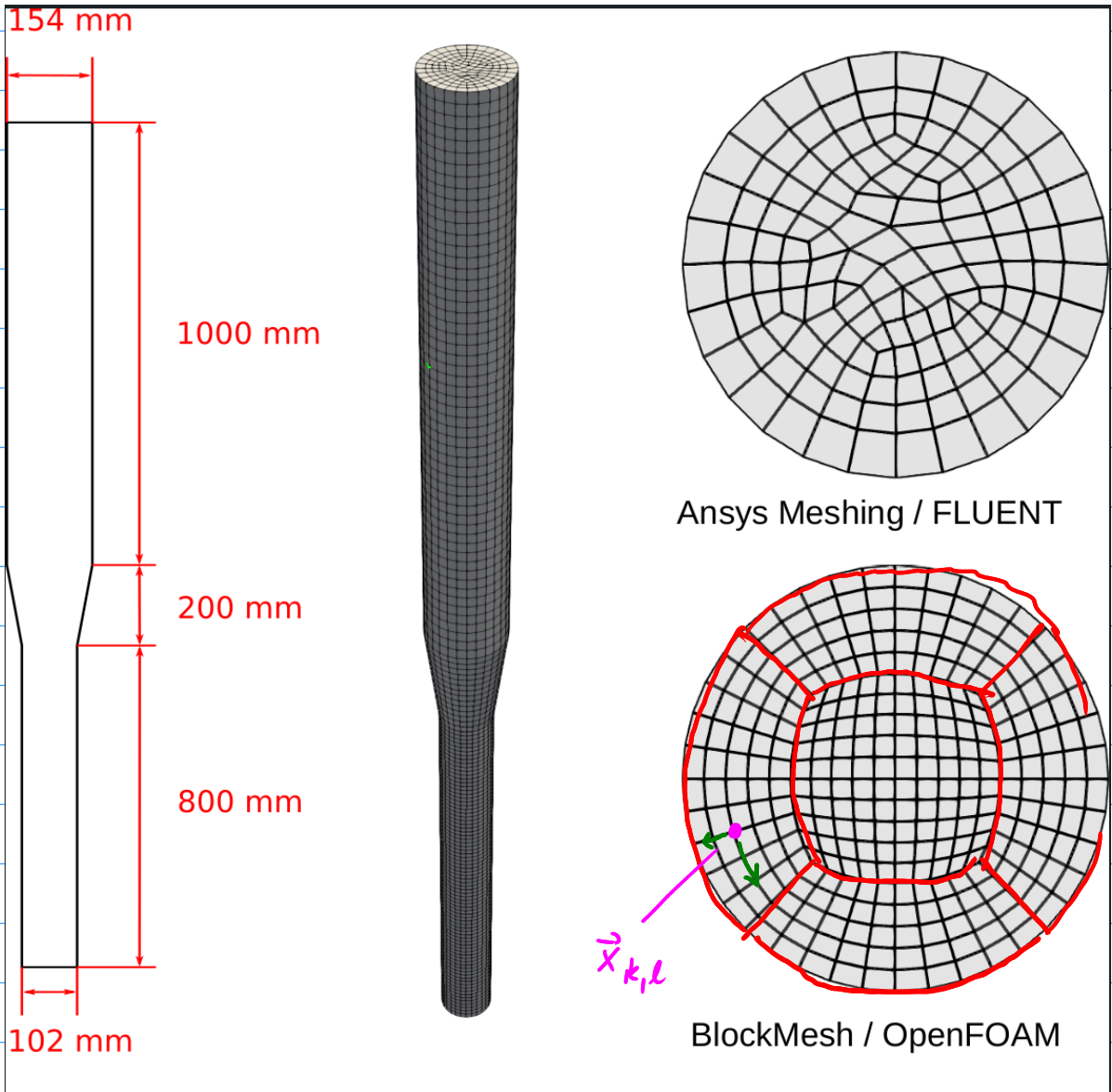


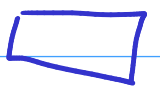
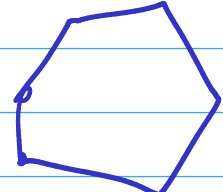
sít' ze čtyřstěnic (gmsh)



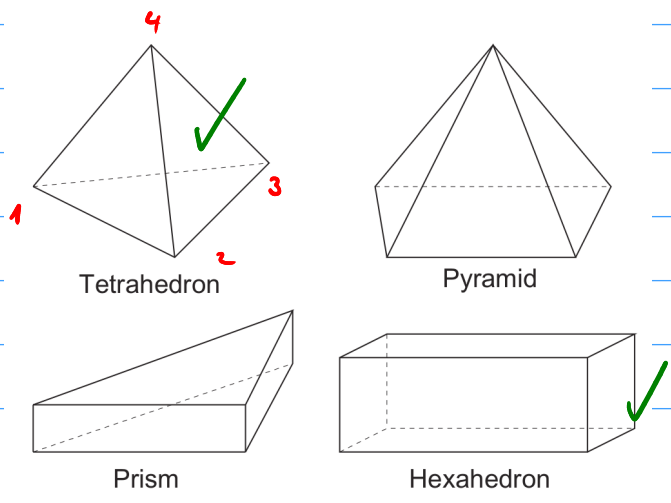
sít' ze šestistěnic se zjemněním u stěn (OpenFOAM BlockMesh + snappyHexMesh)





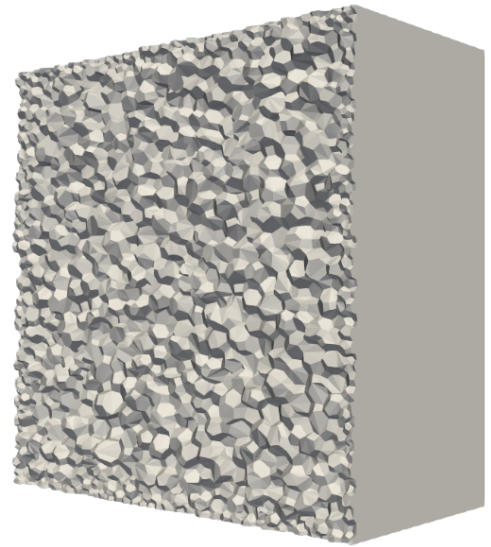
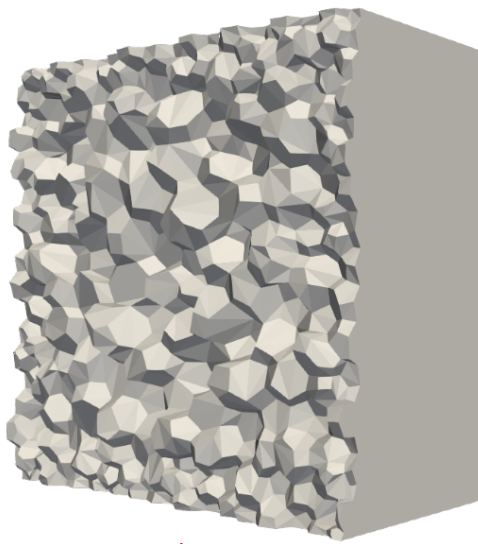
Typy buněk; ve 2D ...  $\Delta$ , , 

ve 3D

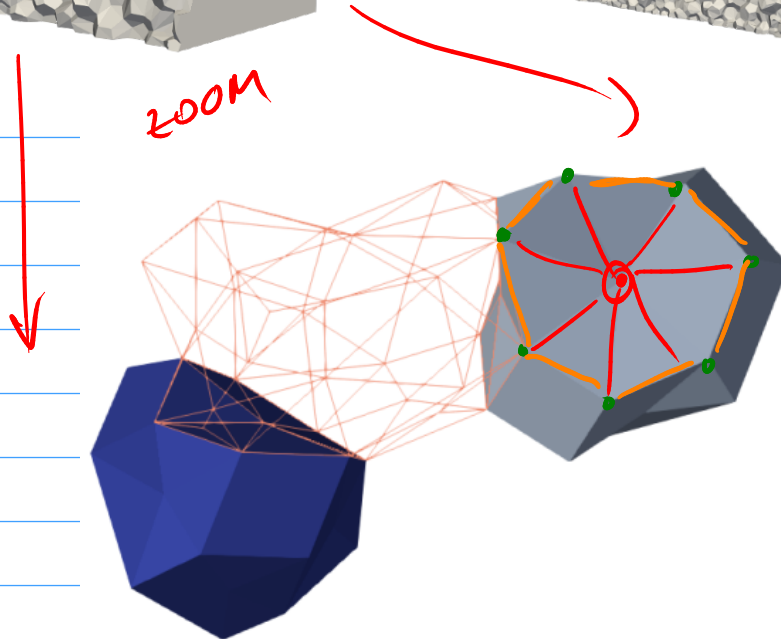




sítě z obecných mnohostěnů



ZOOM



neplaná stěny!

## GEOMETRIE A TOPOLOGIE NESTRUKTUROVANÝCH SÍTÍ

Eymard,  
Gallouët

•  $\mathcal{T}$  ... síť ... množina buněk (konvexních objemů)

•  $K \in \mathcal{T}$   $K$  ... buňka  $K \subset \mathbb{R}^r$   $r \in \{2, 3\}$

•  $\partial K = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \sigma$

$\sigma$  ... stěny ve 3D, hrany ve 2D

$\mathcal{E}_K$  ... množina stěn tvořících hranici  $K$

$\setminus \text{mathcal} \{E\}$

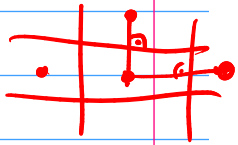
- $E \dots \bigcup_{K \in \mathcal{T}} E_K \dots$  množina vřech stěn sítě

- $E = E_{\text{int}} \uplus E_{\text{ext}}$  kde  $\bigcup_{\sigma \in E_{\text{ext}}} \sigma = \partial\Omega$

$\swarrow$  množina vnitřních stěn  
 $\swarrow$  množina hraničních stěn

$$\sigma_1 = K|L = \partial K \cap \partial L \in E_K \cap E_L$$

Pr. 2D



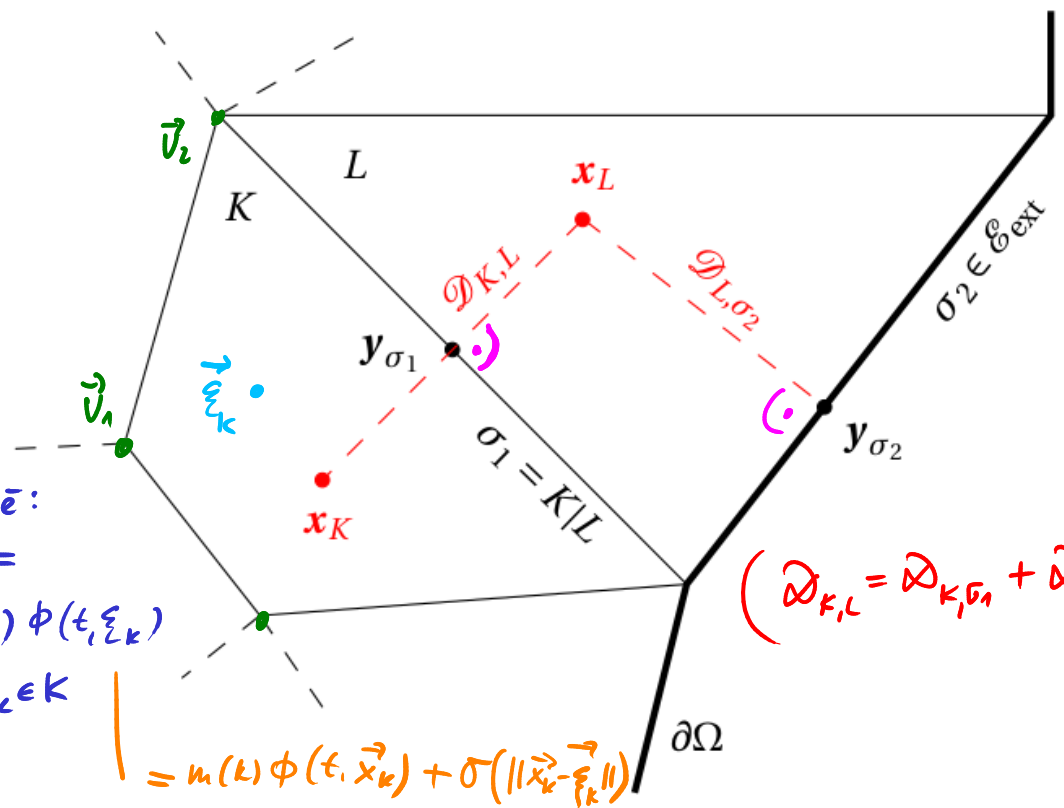
PRINCIP:

věta o střední hodnotě:

$$\int_K \Phi(t, \vec{x}) d\vec{x} = m(K) \Phi(t, \vec{x}_K)$$

kde  $\vec{x}_K \in K$

$$= m(K) \Phi(t, \vec{x}_K) + O(\|\vec{x}_K - \vec{\xi}_K\|)$$



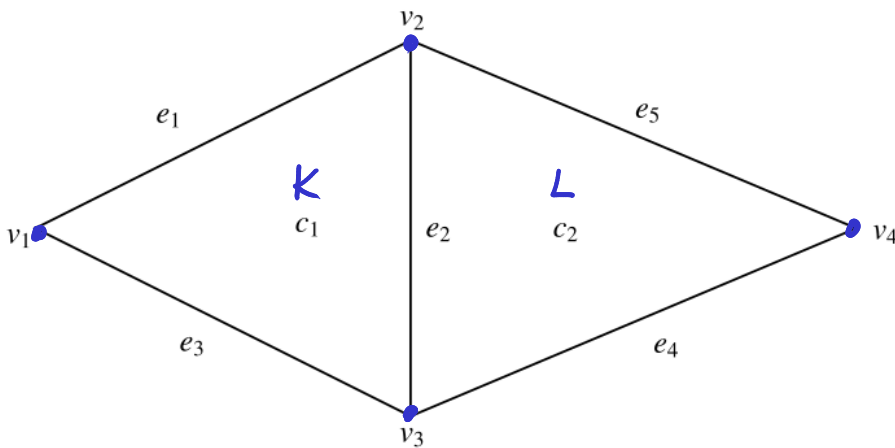
$$(\mathcal{D}_{K,L} = \mathcal{D}_{K,\sigma_1} + \mathcal{D}_{L,\sigma_1})$$

- "cell-centered" schéma ... v každé buňce  $K$  je def. "významný bod"  $\vec{x}_K$  (centroid) kde vyčísľujeme hodnoty neznámých  $f$ .
- "cell-vertex" schéma ... hodnoty vyčísľujeme ve vrcholech  $\vec{v}_i$
- "staggered-grid" schéma ... kombinuje oba přístupy "střídavě"

- $D_{K,L}$  ... vzdálenost bodů  $\vec{x}_K, \vec{x}_L$  pro  $K, L \in E_{int}$
- $D_{K,\sigma}$  ... vzdálenost  $\vec{x}_K$  a  $\vec{y}_{K,\sigma}$  ... průmět  $\vec{x}_K$  na hranici stěny  $\sigma \in E_{ext}$
- $\vec{x}_K, \vec{x}_L \perp (K, L) \Rightarrow$  přípustná síť (admissible mesh)
- $P = \{ \vec{x}_K \mid K \in \mathcal{T} \}$
- množinu funkce  $\mathcal{H}_\tau = \{ w : P \rightarrow \mathbb{R} \}$  nazýváme množinou síťových funkcí

### TOPOLOGICKÁ INFORMACE O SÍTI ... GRAFOVÝ PŘÍSTUP

2D



$$\underbrace{\{v_1, v_2, v_3, v_4\}}_{\in \mathcal{T}^0} \cup \underbrace{\{e_1, \dots, e_5\}}_{\in \mathcal{T}^1} \cup \underbrace{\{c_1, c_2\}}_{\in \mathcal{T}^2} = \mathcal{T}^* \quad \text{všechny "entity" sítě}$$

$$\mathcal{T}^* = \mathcal{T}^0 \cup \mathcal{T}^1 \cup \mathcal{T}^2$$

dimenze entity

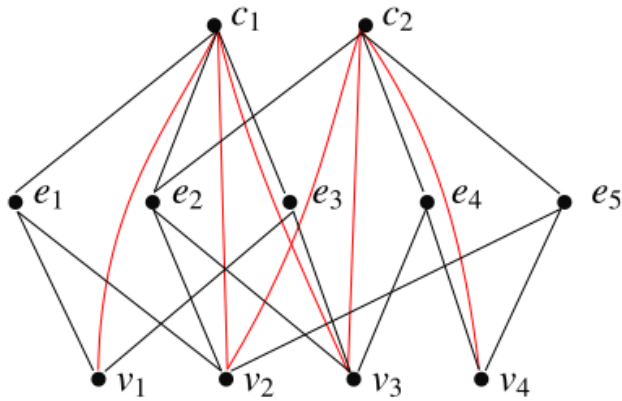
$e, f \in \mathcal{T}^*$  jsou "spojené"  $\Leftrightarrow (ec \partial f \vee fc \partial e)$

tedy  $E = \{ (e, f) \mid e, f \text{ jsou spojené, } e, f \in \mathcal{T}^* \}$   
 množina hran (teorie grafů) grafu  $(V, E)$  kde  $V = \mathcal{T}^*$

spojení entit

$$A = (a_{ij})$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (\Leftrightarrow) (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad \text{--- } \in \mathcal{T}^*$$



$A$  lze rozdělit na bloky podle dimenze

$$A^{d_1, d_2} = (a_{ij}^{d_1, d_2})$$

$$a_{ij}^{d_1, d_2} = \begin{cases} 1 & (\Leftrightarrow) (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

kde  $v_i \in \mathcal{T}^{d_1}, v_j \in \mathcal{T}^{d_2}$

$$A_{G_{\mathcal{T}^*}} =$$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$c_1$	$c_2$
$v_1$	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0
$v_2$	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1
$v_3$	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1
$v_4$	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1
$e_1$	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$e_2$	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0
$e_3$	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
$e_4$	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1
$e_5$	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
$c_1$	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0
$c_2$	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0

$$A_{G_{\mathcal{T}^*}} =$$

	$\mathcal{T}^0$	$\mathcal{T}^1$	$\mathcal{T}^2$
$\mathcal{T}^0$	$A_{G_{\mathcal{T}^*}}^{0,0}$	$A_{G_{\mathcal{T}^*}}^{0,1}$	$A_{G_{\mathcal{T}^*}}^{0,2}$
$\mathcal{T}^1$	$A_{G_{\mathcal{T}^*}}^{1,0}$	$A_{G_{\mathcal{T}^*}}^{1,1}$	$A_{G_{\mathcal{T}^*}}^{1,2}$
$\mathcal{T}^2$	$A_{G_{\mathcal{T}^*}}^{2,0}$	$A_{G_{\mathcal{T}^*}}^{2,1}$	$A_{G_{\mathcal{T}^*}}^{2,2}$

"Rekonstrukce"  $A$  pomocí  $A^{d_i, d_j}$ :

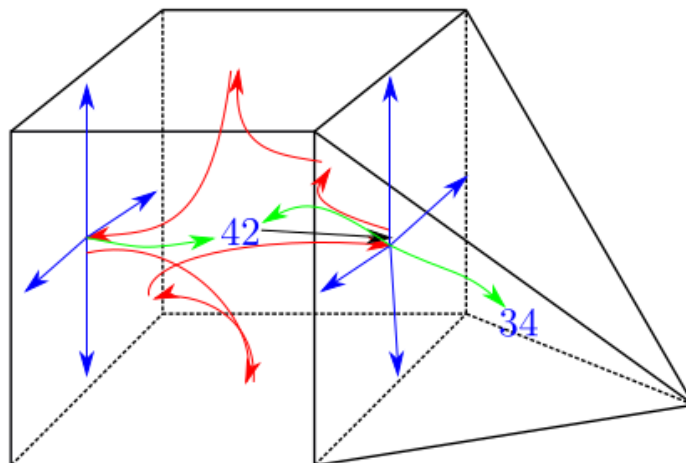
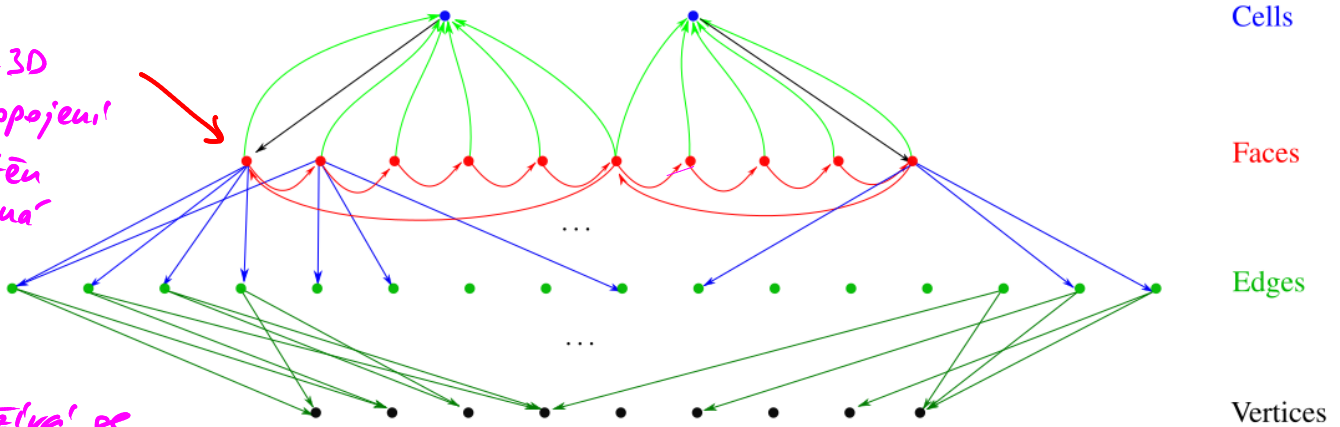
$$[\mathbb{A}_{G_{\mathcal{T}^*}}^{d_1, d_2}]_{ij} = \text{connect}(\mathbb{A}_{G_{\mathcal{T}^*}}^{d_1, d_3}, \mathbb{A}_{G_{\mathcal{T}^*}}^{d_3, d_2})$$

$$d_1 < d_3 < d_2$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{if } (\exists k \in \{1, 2, \dots, N_{\mathcal{T}^*}^{d_3}\}) \left( [\mathbb{A}_{G_{\mathcal{T}^*}}^{d_1, d_3}]_{ik} [\mathbb{A}_{G_{\mathcal{T}^*}}^{d_3, d_2}]_{kj} = 1 \right), \\ 0 & \text{else,} \end{cases}$$

### TOPOLOGICKÁ INFORMACE VE 3D

! ve 3D  
 • propojení stěn  
 nemá smysl jako ve 2D,  
 ale používá se k iteraci přes stěny  
 (v lib. pořadí)

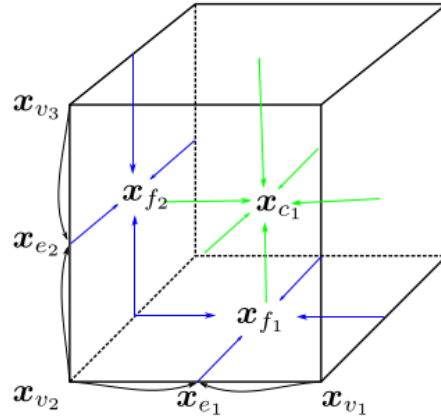


## VÝPOČET GEOMETRICKÉ INFORMACE O SÍTI

- pozice bodů  $\vec{x}_k$  (centroidů)

a) - hierarchicky  
od dimenze 0  
po dimenzi  $r \in \{2, 3\}$

nebo



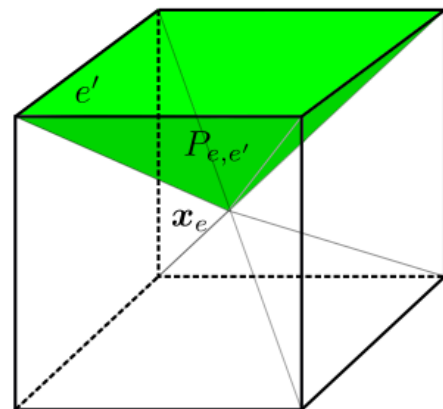
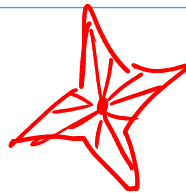
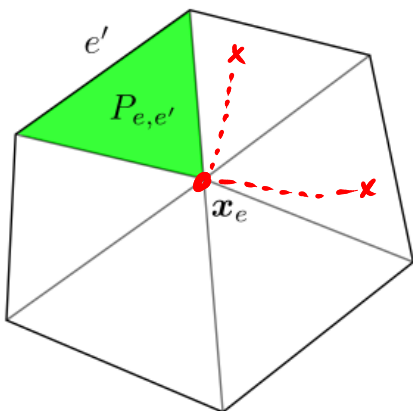
b) - těžiště vrcholů spojených s entitou (buněk)

(a) ani (b) obecně nemají splnit předpoklad ortogonalitu

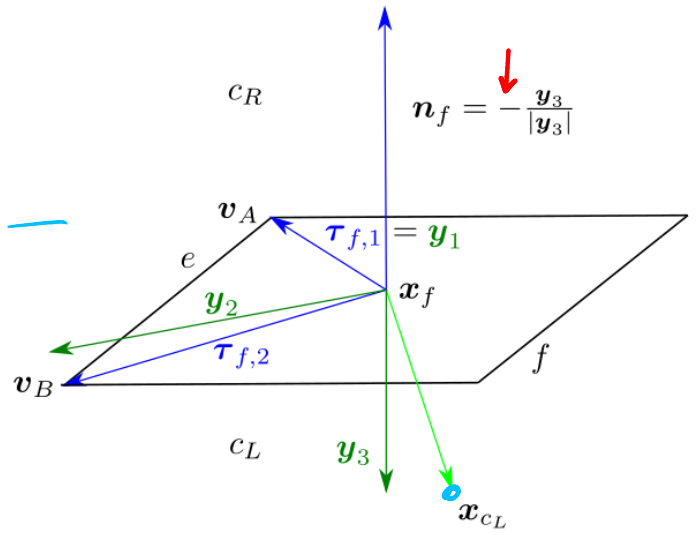
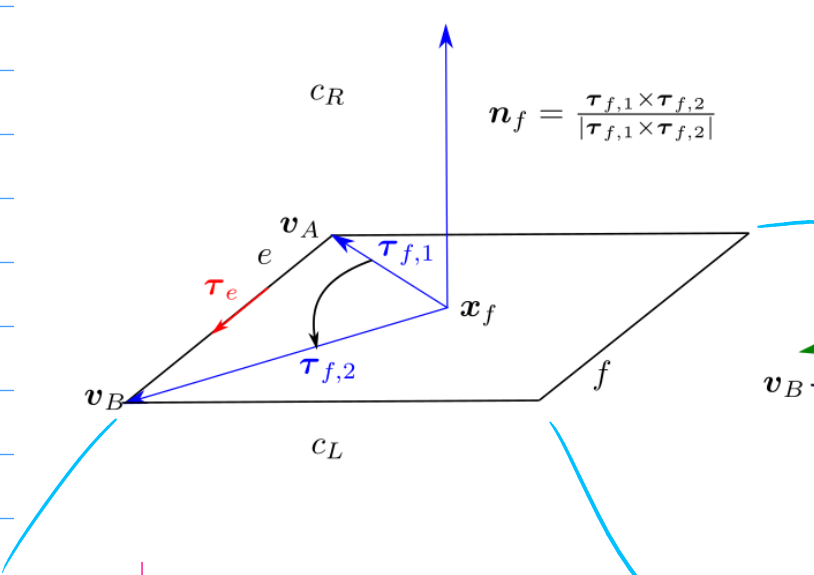
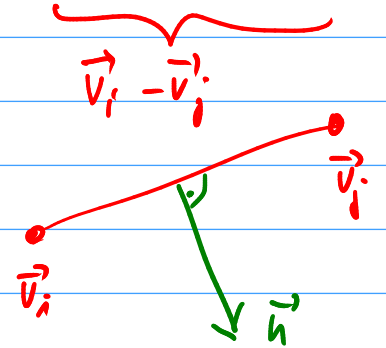
- 
- "velikost" (Lebesgueova  $d$ -rozměrná míra)  $d$ -rozměrných entit

- předpokládáme tzv. hvězdicovitost entit vzhledem k

jejich centroidům



- výpočet normál ke stěněm ve 3D, resp. hranám ve 2D

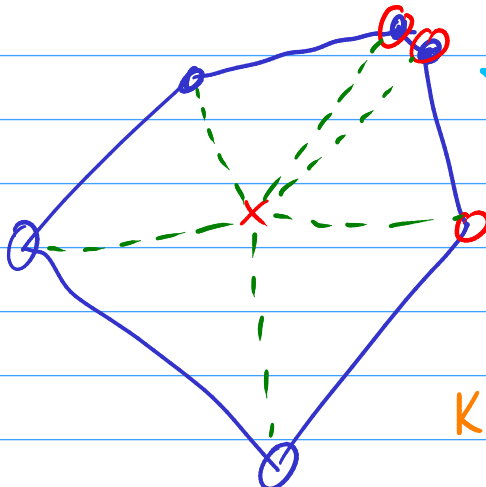


$\vec{x}_{CL}$

nejedná o jistě orientaci  $\vec{n}_f$

G-S ortogonalizace proces

=> normální vektor směřuje ven z buňky  $C_L$



Pozor k robustnosti výpočtu

K neplanárním stěnám - viz níže...

# METODA KONEČNÝCH OBJEMŮ PRO NS ROVNICE

ve 2D:  $\partial_t \vec{W} + \underbrace{\partial_1 \vec{F} + \partial_2 \vec{G}}_{\text{nerazko' fyz. toky}} = \underbrace{\partial_1 \vec{R} + \partial_2 \vec{S}}_{\text{vazko' toky}}$

nerazko'  
fyz. toky

vazko' toky

$\vec{R}, \vec{S}$  obsahují derivace  
podle  $x_1, x_2$

MKO: zintegrujeme NS rovnice přes  $K \in \mathcal{T}$

$$\frac{d}{dt} \int_K \vec{W} d\vec{x} + \int_K \partial_1 \vec{F} + \partial_2 \vec{G} d\vec{x} = \int_K \partial_1 \vec{R} + \partial_2 \vec{S} d\vec{x}$$

pozijeme Greenovu formuli

$$\vec{n}_K = \begin{pmatrix} n_{1,K} \\ n_{2,K} \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \int_K \vec{W} d\vec{x} + \int_{\partial K} \vec{F} n_{1,K} + \vec{G} n_{2,K} dS = \int_{\partial K} \vec{R} n_{1,K} + \vec{S} n_{2,K} dS$$

směry  
ven  
z K

$$\frac{d}{dt} \int_K \vec{W} d\vec{x} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_{\sigma} \vec{F} n_{1,K,\sigma} + \vec{G} n_{2,K,\sigma} dS = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_{\sigma} \vec{R} n_{1,K,\sigma} + \vec{S} n_{2,K,\sigma} dS$$

↓ předved k síťové funkci

fyzikální toky  $\vec{F}_{n_{1,K,\sigma}} \dots \vec{F}_{K,\sigma} \dots$  numerické toky

$$\vec{W} \dots \vec{W}_K(t) := \vec{W}_K(t, \vec{x}_K)$$

cell-centered  
scheme

hodnota  
v centroidu  $\vec{x}_K$

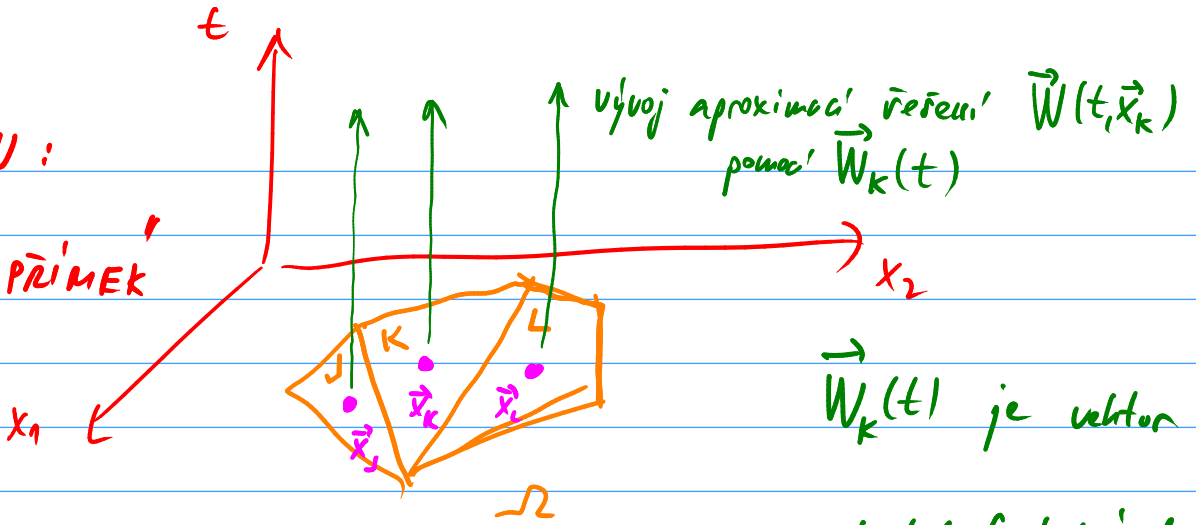
síťová funkce



POZN :

**METODA PŘÍMEK**

(method of lines)



$\vec{W}_k(t)$  je vektor

neznámých funkcí jedné proměnné  $(t)$

$\Rightarrow$  jde o soustavu ODR

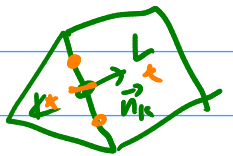
$\Rightarrow$  volbu ve volbě časové integrace systému ODR (Euler expl. / impl., Runge-Kuttovy metody atd.)

$$\frac{d}{dt} \int_K \vec{W} d\vec{r} + \sum_{\sigma \in \Sigma_K} \int_{\sigma} \vec{F}_{n_{1,K\sigma}} + \vec{G}_{n_{2,K\sigma}} dS = \sum_{\sigma \in \Sigma_K} \int_{\sigma} \vec{R}_{n_{1,K\sigma}} + \vec{S}_{n_{2,K\sigma}} dS$$

$$\frac{d}{dt} m(K) \vec{W}(t, \vec{\xi}_K) + \sum_{\sigma \in \Sigma_K} m(\sigma) [\vec{F}(t, \vec{\xi}_{\sigma}) n_{1,\sigma} + \vec{G}(t, \vec{\xi}_{\sigma}) n_{2,\sigma}] =$$

$$\vec{\xi}_K \in K \quad \vec{\xi}_{\sigma} \in \sigma \quad = \sum_{\sigma \in \Sigma_K} m(\sigma) [\vec{R}(t, \vec{\xi}_{\sigma}) n_{1,\sigma} + \vec{S}(t, \vec{\xi}_{\sigma}) n_{2,\sigma}]$$

$\downarrow$  náhrada silovou fci



$$\frac{d}{dt} m(K) \vec{W}_K(t) + \sum_{\sigma \in \Sigma_K} m(\sigma) (\vec{F}_{K\sigma}(t) + \vec{G}_{K\sigma}(t)) =$$

$$= \sum_{\sigma \in \Sigma_K} m(\sigma) (\vec{R}_{K\sigma}(t) + \vec{S}_{K\sigma}(t))$$

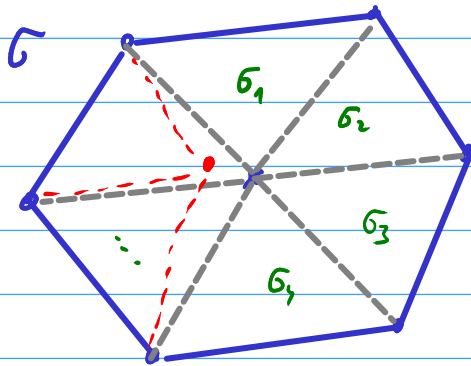
$$\vec{n}_{K\sigma} = -\vec{n}_{L\sigma}$$

$\Downarrow$

$$\vec{F}_{K\sigma} = -\vec{F}_{L\sigma}$$

$\Rightarrow$  PŘIROZENÉ KONZERVATIVNÍ SCHEMA

## NEPLANA'RNI' STENY



.. triangulace  $\sigma$

$$\bar{\sigma} = \bigcup_i \bar{\sigma}_i$$

připomeňme :  $\vec{F}(t, \vec{y}_\sigma) n_{1,k,\sigma} \rightarrow \vec{F}_{k,\sigma}(t)$   
nahrazení

označme  $\vec{F}_{k,\sigma}(t) = \vec{F}_\sigma(t) n_{1,k,\sigma}$

už zohledňuje orientaci

normály k  $\sigma$  vzhledem ke  $K$

nezohledňuje -1-

hledáme "průměrnou" normálu  $\vec{n}_{k,\sigma}$  takovou, že (např. pro  $\vec{F}$ ):

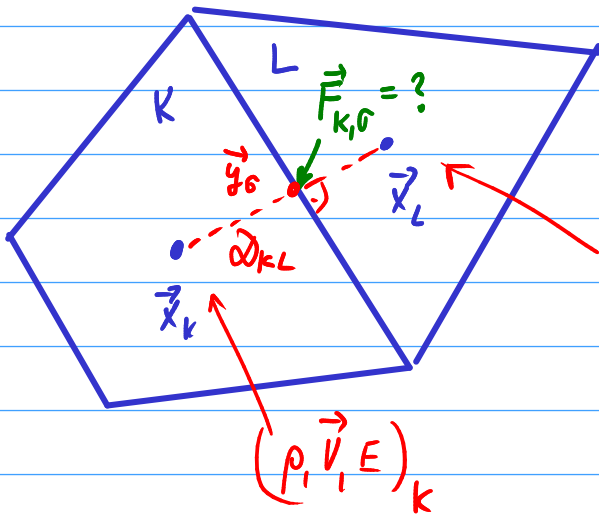
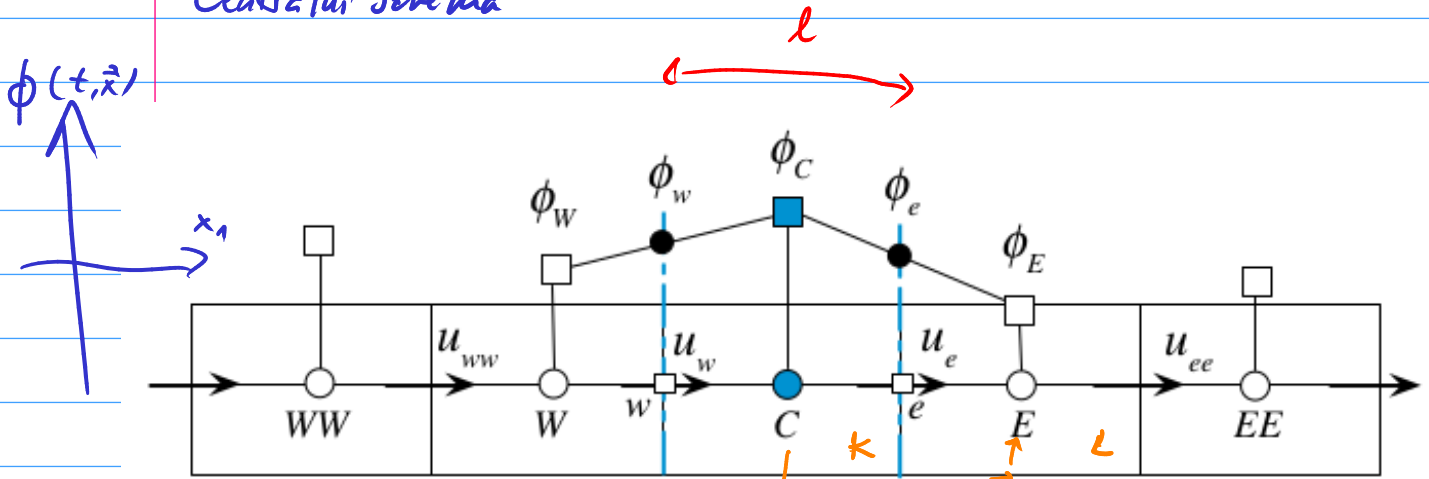
$$m(\sigma) \vec{F}_k(t) n_{1,k,\sigma} \stackrel{!}{=} \sum_i m(\sigma_i) n_{1,k,\sigma_i} \vec{F}_k(t)$$

$$\Rightarrow n_{1,k,\sigma} = \frac{\sum_i m(\sigma_i) n_{1,k,\sigma_i}}{m(\sigma)}$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{k,\sigma} = \frac{\sum_i m(\sigma_i) \vec{n}_{k,\sigma_i}}{m(\sigma)}$$

# APROXIMACE (NAHRADY) NEVAZKÝCH (ADVEKČNÍCH) TOKŮ

Centrální schéma



$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \rho v_1 \\ \rho v_1^2 + p \\ \rho v_1 v_2 \\ (\rho E + p) v_1 \end{pmatrix}$$

$\phi$  obecná skalární veličina

známe  $\phi_K, \phi_L$   
tj. veličiny v bodech  $\vec{x}_K, \vec{x}_L (\dots)$

a chceme  $\phi_G$

centrální schéma: lin. interpolace  $\phi$  mezi  $\vec{x}_K, \vec{x}_L$

$$\phi_G = \phi_K + \frac{|\vec{y}_0 - \vec{x}_K|}{\Delta_{KL}} (\phi_L - \phi_K)$$

charakteristická vzdálenost

Pozn: Pécletovo číslo

$$Pe_\ell = \frac{\ell |\vec{v}|}{D}$$

difuzivita veličiny  $\phi$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D \Delta \phi$$

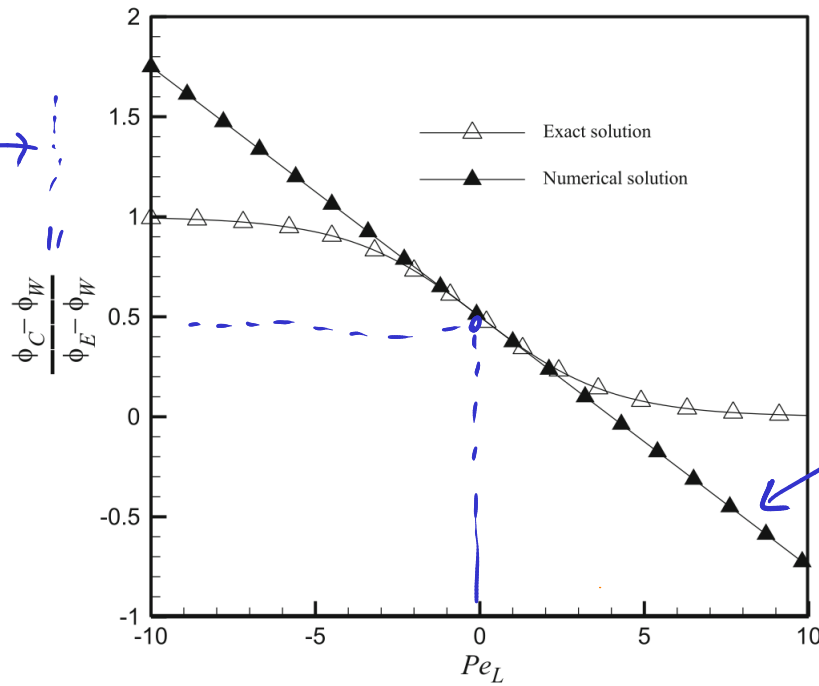
# VZOROVÝ PŘÍKLAD - STACIONÁRNÍ ADVEKCE + DIFUZE

Pokud  $l$  je velikost buňky  $v$  (1D případ)

(tedy  $l = |\vec{x}_E - \vec{x}_W|$ )

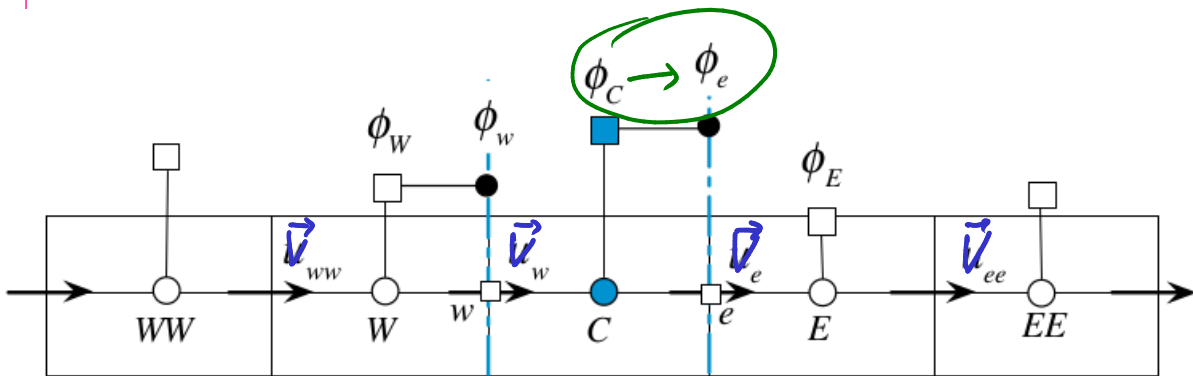
520

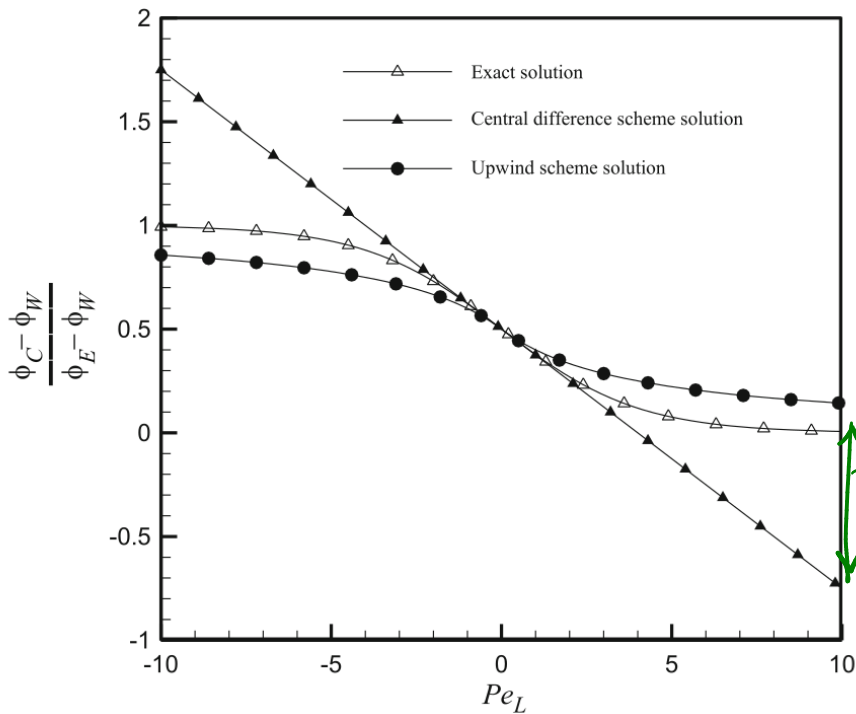
explicitní  
vzorec  
závislý  
na  $Pe_L$



hodnoty  
dosazené  
z num. řešení  
pomocí  
centrálního  
schémata

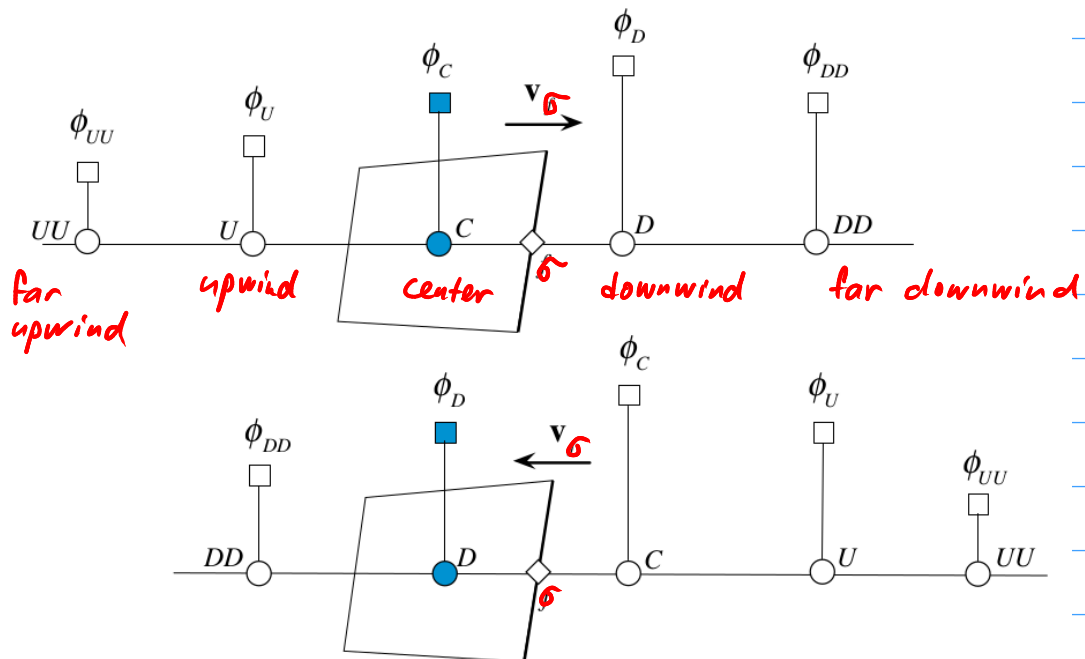
## Upwind schéma 1. řádu





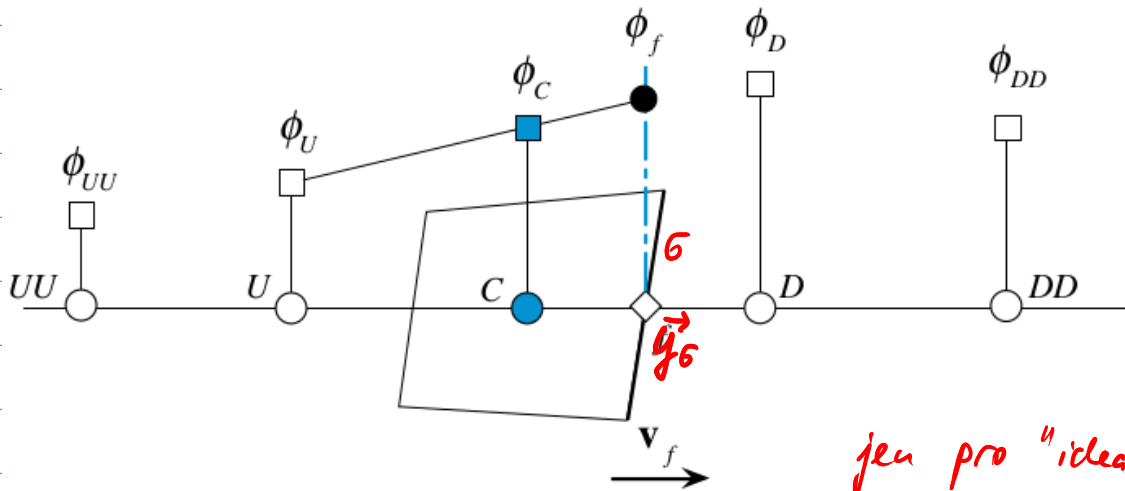
→  
 chyba centrálního  
 schématu  
 roste  
 větší ↓  
 menší 0, resp. ∞  
 → > >

Snaha o upwind diskretizaci vyššího řádu než 1 (ten. 2)



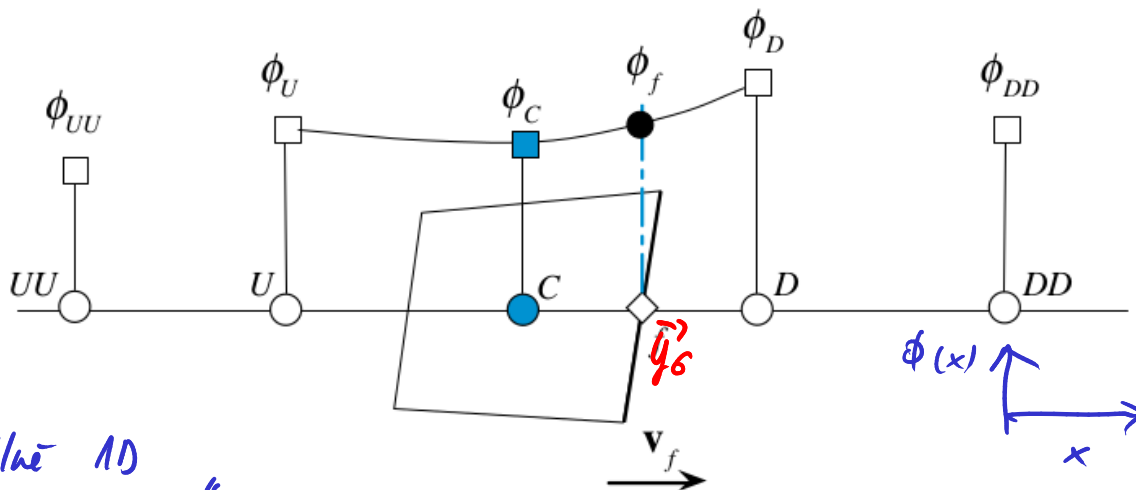
V praxi : vezmeme lin. interpolaci  $\vec{v}_k, \vec{v}_l$ ,  
 získáme aproximaci  $\vec{v}_\sigma$  (na hraně, resp. stěně)  
 Směr upwindu určuje znaménko  $\vec{v}_\sigma \cdot \vec{n}_\sigma$

## SOU schéma (Second Order Upwind)



jeu pro "ideální"  
případ, kdy  
(U, C, f) tj.  
 $(\vec{x}_U, \vec{x}_C, \vec{y}_0)$  jsou na  
přímce

## QUICK schéma (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics)



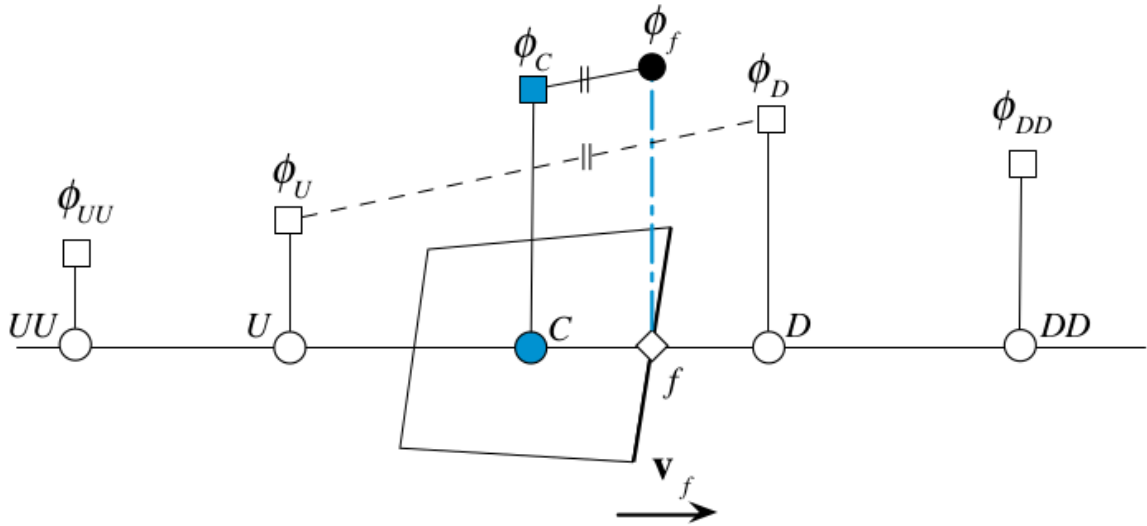
"lokálně 1D  
přechod"

$$\phi = k_0 + k_1x + k_2x^2,$$

interpolace kvadratickou funkcí

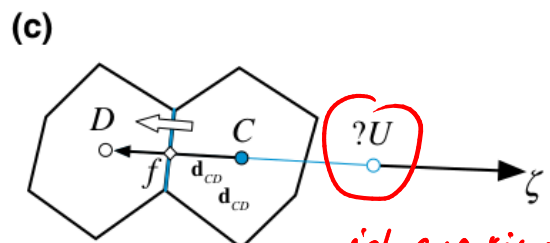
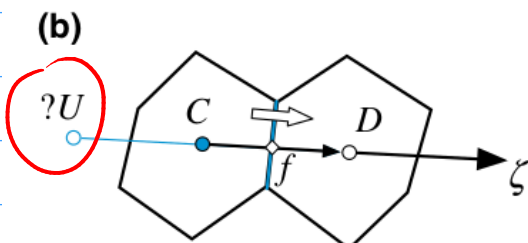
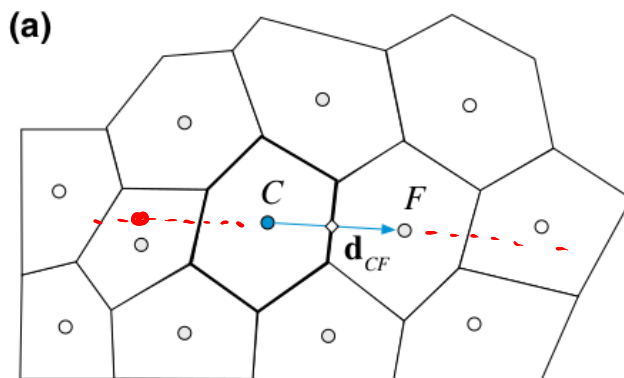
kde  $\phi(\vec{x}) = \begin{cases} \phi_U & \text{pro } \vec{x} = \vec{x}_U \\ \phi_C & \text{pro } \vec{x} = \vec{x}_C \\ \phi_D & \text{pro } \vec{x} = \vec{x}_D \end{cases}$

# FROMM schema



$$\phi(x) = \phi_U + \frac{\phi_D - \phi_U}{x_D - x_U} (x - x_U)$$

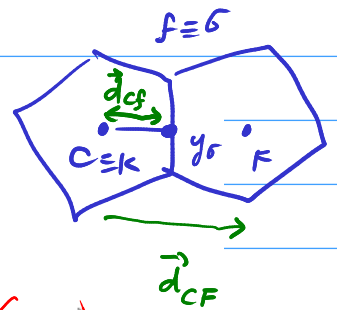
? jak na upwind na nerovnomernych sitich  
v 2D, 3D



jak aproximovat  
 $\phi$  ve virechlinim uzlu U?

řešení: aproximace gradientu  $\phi$  na stěně ( $\nabla\phi_f$ ), resp. v uzlu  $\vec{x}_c$  ( $\nabla\phi_c$ )

$$\|\vec{d}_{cf}\| = \Delta_{cf}$$



Upwind scheme :

$$\phi_f = \phi_c$$

Central difference :

$$\phi_f = \phi_c + \nabla\phi_f \cdot \mathbf{d}_{cf}$$

SOU scheme :

$$\phi_f = \phi_c + (2\nabla\phi_c - \nabla\phi_f) \cdot \mathbf{d}_{cf}$$

FROMM scheme :

$$\phi_f = \phi_c + \nabla\phi_c \cdot \mathbf{d}_{cf}$$

QUICK scheme :

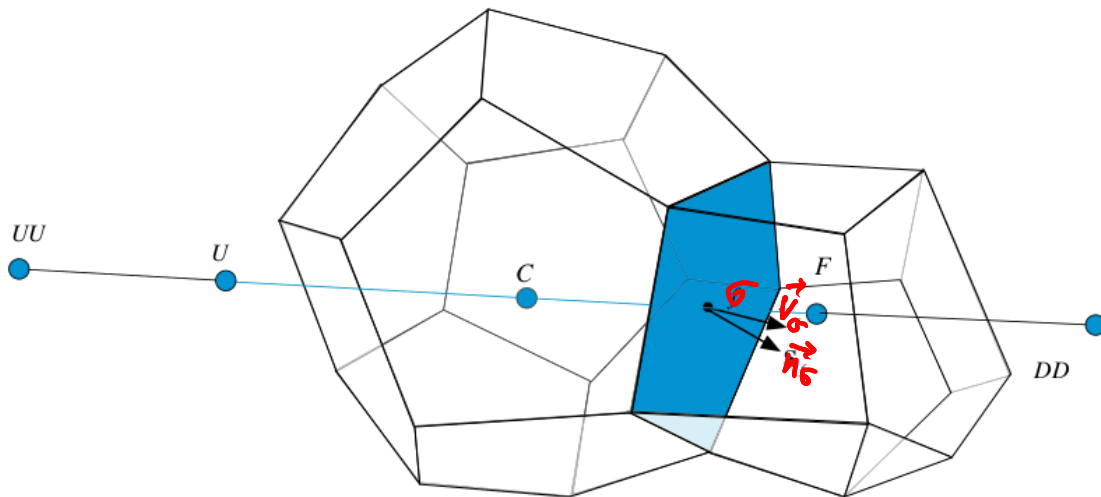
$$\phi_f = \phi_c + \frac{1}{2}(\nabla\phi_c + \nabla\phi_f) \cdot \mathbf{d}_{cf}$$

Downwind scheme :

$$\phi_f = \phi_c + 2\nabla\phi_f \cdot \mathbf{d}_{cf}$$

gradient na stěně  
gradient ve středě  
buněk

ve 3D



Otázka : jak aproximovat  $\nabla\phi_c$ ,  $\nabla\phi_f$  ( $f = \sigma$ ) ... dále

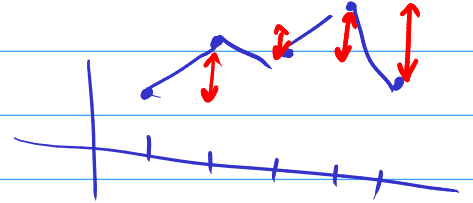


## STABILITA SCHEMAT (podle "TVD" vlastnosti)

- v metodě konečných dif. na pravidelné 1D síti:

$$TV(u^n) = \sum_k |u_{k+1}^n - u_k^n|$$

totální variace



- "TVD" vlastnost (Total Variation Diminishing) je

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n) \quad \forall n$$

( $\Rightarrow$ ) v čase nevznikají oscilace

- každé TVD schéma je stabilní

- monotónní schéma  $\Rightarrow$  TVD schéma  $\Rightarrow$  schéma zachovávající monotónii

$$\text{pokud } u_k^n \leq v_k^n, \\ \text{pak } u_k^{n+1} \leq v_k^{n+1}$$

pro lin. rovnici:  
pozitivní = monotónní

(monotonicity preserving scheme)

pokud  $u^n$  je monotónní v  $k$   
 $\Rightarrow u^{n+1}$  je také monotónní

- Hartenova věta:** schéma ve tvaru

$$u_k^{n+1} = u_k^n + C(u_{k+1}^n - u_k^n) - D(u_k^n - u_{k-1}^n), \quad (11.1)$$

pro které platí  $C, D \geq 0$  a zároveň  $C + D \leq 1$ , je TVD, a pro skalární rovnici je i konvergentní.

TVD na nerestrikt síti:  $TV = \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E} \\ \sigma = KIL}} |\phi_K - \phi_L|$

$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x}}_{RHS} \quad a \quad RHS = -a(\phi_C - \phi_U) + b(\phi_D - \phi_C)$

*u... je rychlost, center upwind downwind*

$a \geq 0, b \geq 0, \text{ and } 0 \leq a + b \leq 1$

$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}_i \phi) = \dots$

*tok přes hranici √*

⇓  
TVD

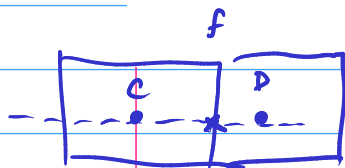
Motivace: aproximace advektivního toku

- stabilní ⇐ upwind
- vyřšího úřdu ⇐ centrální schéma než 1

Centrální schéma

↳ umíte přepsat

$\phi_f = \frac{1}{2}(\phi_D + \phi_C) = \underbrace{\phi_C}_{\text{upwind}} + \frac{1}{2}(\phi_D - \phi_C)_{\text{anti-diffusive flux}}$



→  
⇓

$\phi_f = \phi_C + \frac{1}{2} \psi(r_f) (\phi_D - \phi_C)$

flux (≈ slope) limiter

≈ 0 na nepojitech

≈ 1 na hladkému řešením

kde

$r_f = \frac{\phi_C - \phi_U}{\phi_D - \phi_C}$

(poměr dopředné a zpětné diference)

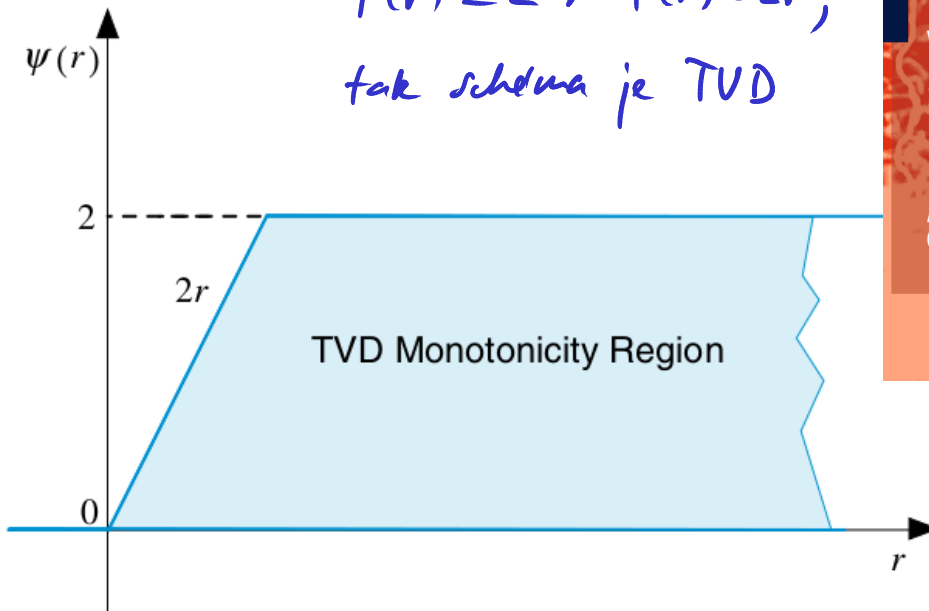
# The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics

An Advanced Introduction with OpenFOAM® and Matlab®

lze odvodit, že pokud  
postav. / podm.

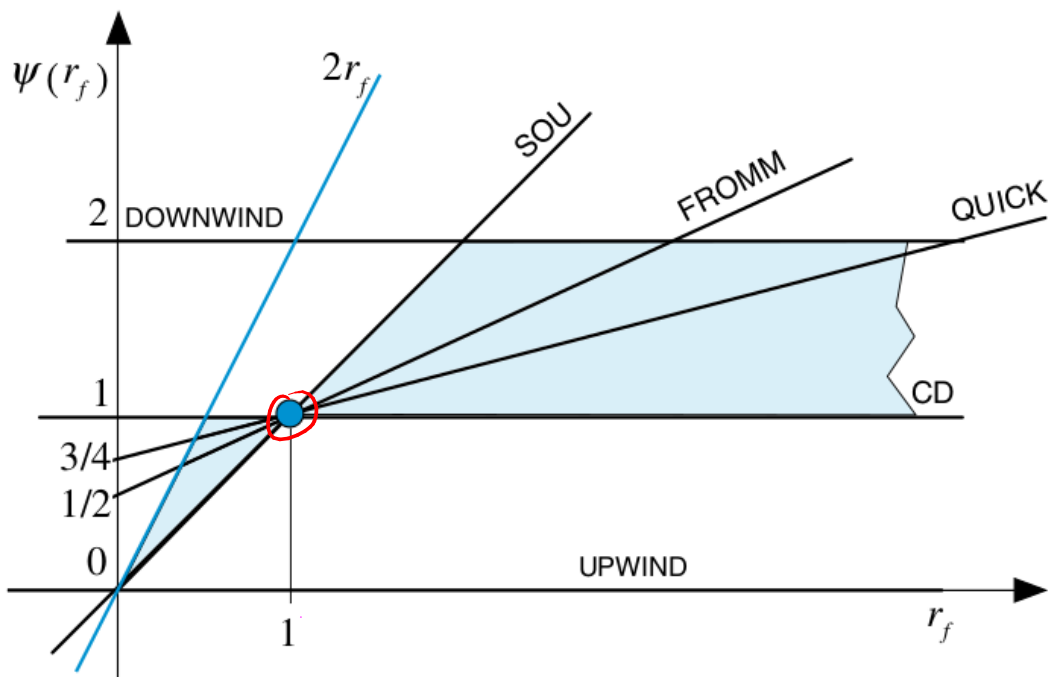
$$\psi(r) \leq 2 \wedge \psi(r) \leq 2r,$$

tak schéma je TVD



{	Upwind	$\psi(r_f) = 0$
	Downwind	$\psi(r_f) = 2$
	FROMM	$\psi(r_f) = \frac{1 + r_f}{2}$
	SOU	$\psi(r_f) = r_f$
	CD	$\psi(r_f) = 1$
	QUICK	$\psi(r_f) = \frac{3 + r_f}{4}$

⇒

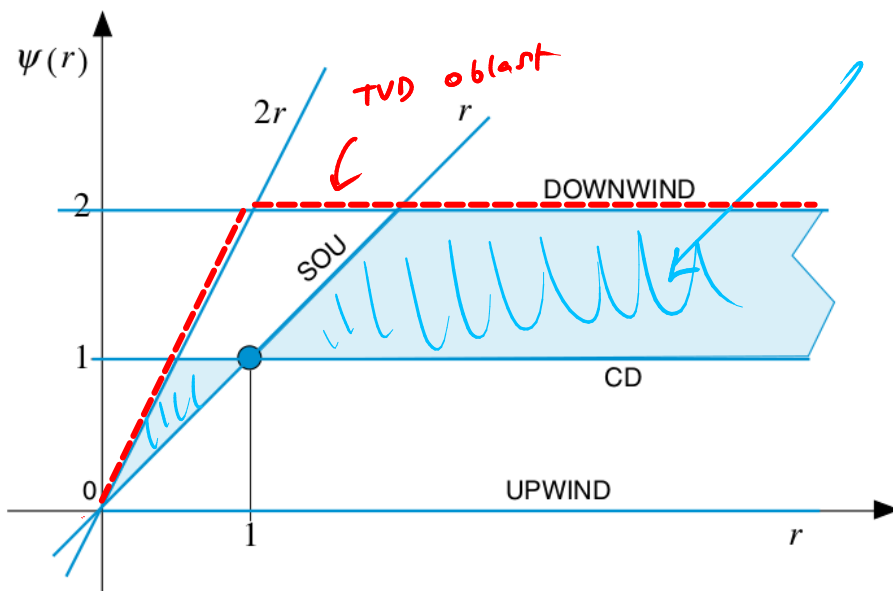


Pozn: Každé řešení 2. řádu se dá upsat jako kombinace CD a SOU

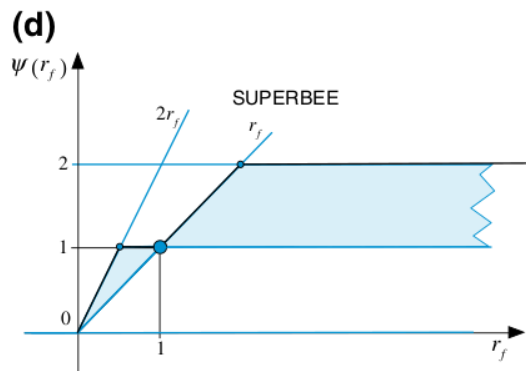
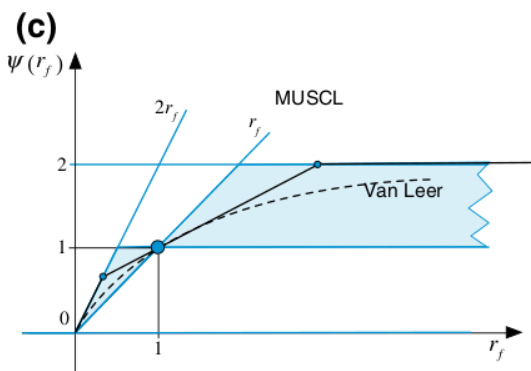
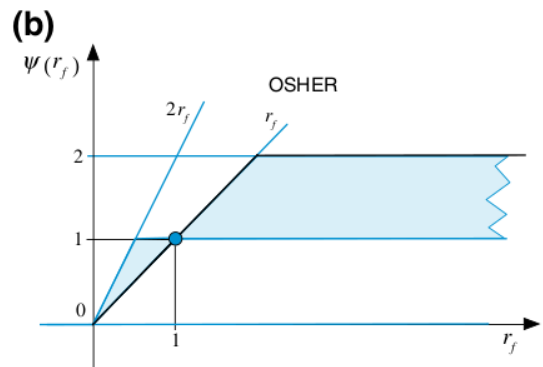
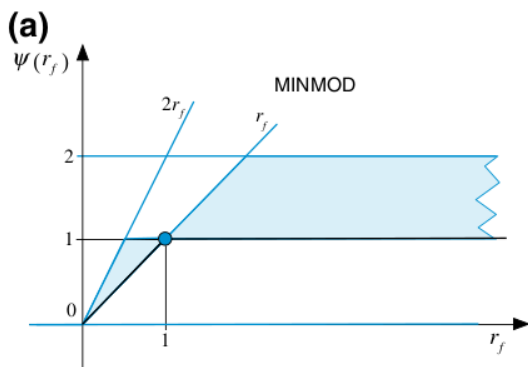


pokud  $r=1$ , tak  
lineární rekonstrukce  
 $\phi_F$  je přesná

aby řešení bylo 2. řádu, musí  $\psi(r)$  procházet bodem (1,1)



## V PRAXI POUŽÍVANE' LIMITERS



*SUPERBEE*  $\psi(r_f) = \max(0, \min(1, 2r_f), \min(2, r_f))$

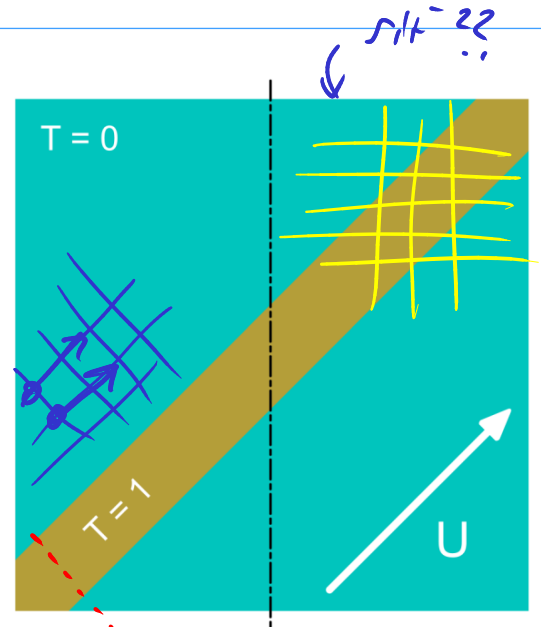
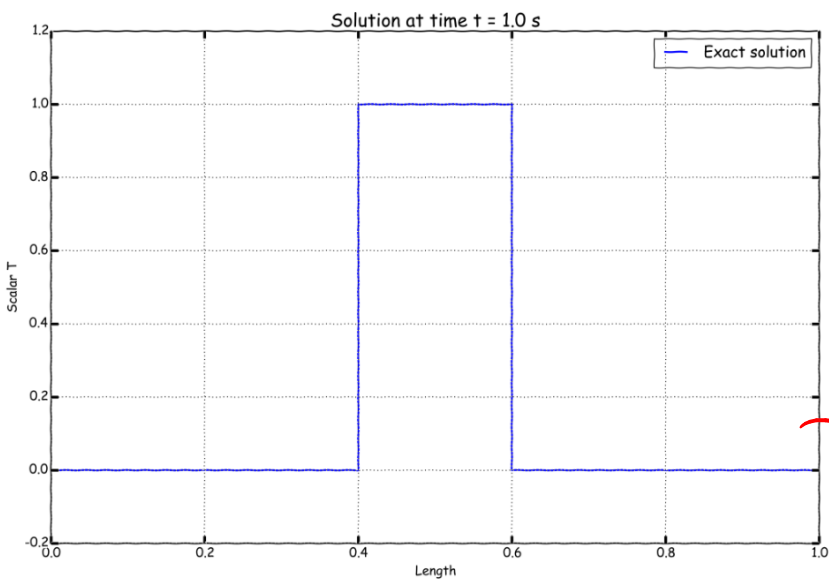
*MINMOD*  $\psi(r_f) = \max(0, \min(1, r_f))$

*OSHER*  $\psi(r_f) = \max(0, \min(2, r_f))$

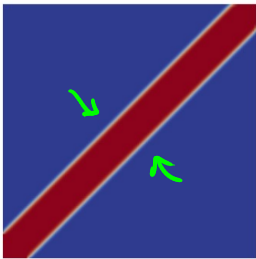
*Van Leer*  $\psi(r_f) = \frac{r_f + |r_f|}{1 + |r_f|}$

*MUSCL*  $\psi(r_f) = \max(0, \min(2r_f, (r_f + 1)/2, 2))$

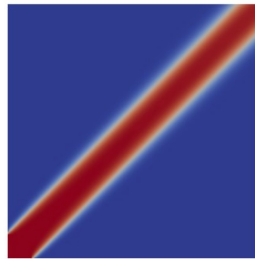
BENCHMARK



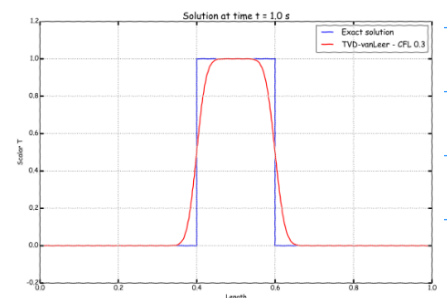
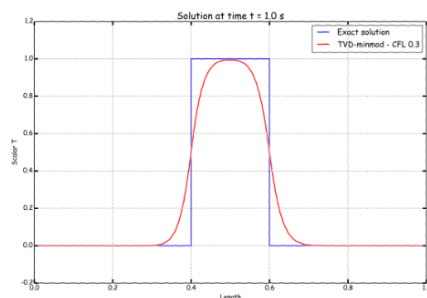
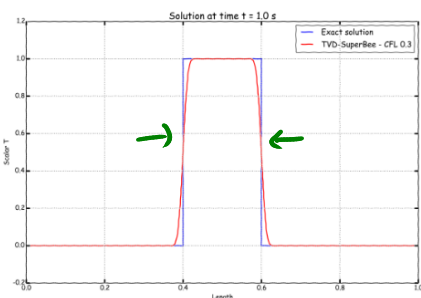
**SuperBee - Compressive**



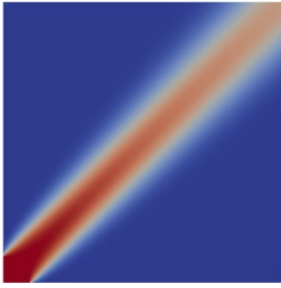
**Minmod - Diffusive**



**vanLeer - Smooth**



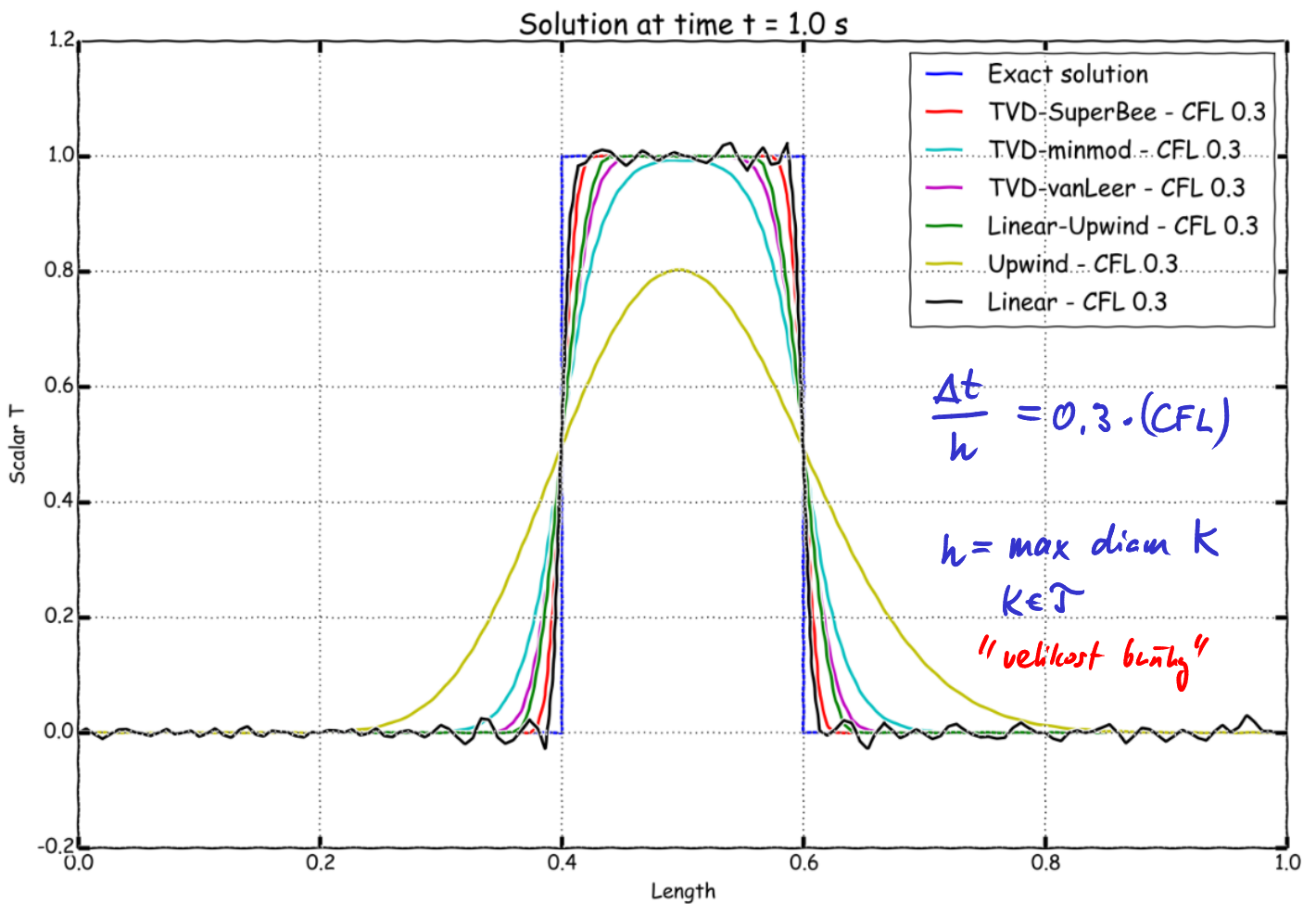
Upwind – 1<sup>st</sup> order



Linear Upwind – 2<sup>nd</sup> order



SuperBee – TVD



- alternativa k TVD je "NUF" .. Normalized Variable Formulation

- implementace schémat 2. řádku může být schéma 1. řádku + dodatečná korekce (Deferred Correction)

⇒ zhoršeni rychlosti konvergence implicitních řešičů

⇒ možnost zlepšení  $\left\{ \begin{array}{l} \text{DWF (Downwind Weighting Factor)} \\ \text{NWF (Normalized WF)} \end{array} \right.$

DALŠÍ PŘÍSTUPY  $\partial_t \vec{W} + \partial_{x_1} \vec{F} + \partial_{x_2} \vec{G} = \dots$

• flux vector splitting

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \rho v_1 \\ \rho v_1^2 + p \\ \rho v_1 v_2 \\ v_1 (\rho E + p) \end{pmatrix} =$$

... AUSM

(Advection Upstream Splitting Method)

... uhybnocije

lokálně na stěněch

Machovo číslo

$$M = \frac{|\vec{v}|}{A} \quad \text{— (lok) rychlost}$$

— lok. rychlost zvuku

$$= \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho H \end{pmatrix} v_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

advekce  $F(c)$

i proti směru rychlosti (pro podzvukové proudění!)

Pozn:

$E$  ... celková energie Htisk / objem  
 $\mathcal{H}$  ... celk. entalpie  $\mathcal{H} = E + PV$

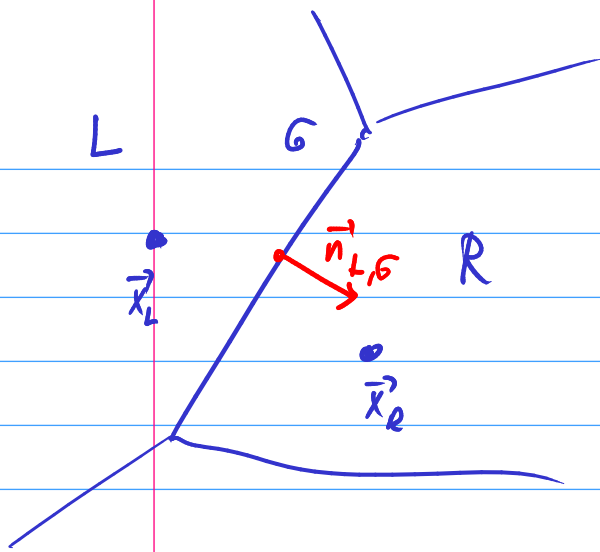
specifická entalpie  $H = \frac{\mathcal{H}}{m} = E + \frac{p}{\rho} \Rightarrow \rho H = \rho E + p$   
— hustota

### A New Flux Splitting Scheme

MENG-SING LIQU AND CHRISTOPHER J. STEFFEN, JR.

Internal Fluid Mechanics Division, NASA Lewis Research Center, Cleveland, Ohio 44135

Received May 8, 1991



aproximace  $F^{(c)}$  na stěně  $G$

$$F_G^{(c)} = \frac{V_{1,G}}{A} \begin{pmatrix} AP \\ APV_1 \\ APV_2 \\ APH \end{pmatrix} = M_G \begin{pmatrix} PA \\ PAU_1 \\ PAU_2 \\ PAH \end{pmatrix}_G$$

kde

$$(\cdot)_G = \begin{cases} (\cdot)_L & \text{pokud } M_G \geq 0 \\ (\cdot)_R & \text{pokud } M_G \leq 0 \end{cases}$$

$M_G$  ... charakt rychlost na stěně  $G$  ( $|M_G| < 1 \Rightarrow$  podzvuk,  $> 1 \Rightarrow$  nadzvuk)

$$M_G = M_L^+ + M_R^-$$

Van Leerovo  
rozdělení  
(splitting)

$$M_{\cdot}^{\pm} = \begin{cases} \pm \frac{1}{4} (M_{\cdot} \pm 1)^2 & \text{pro } |M_{\cdot}| \leq 1 \quad (\text{podzvuk}) \\ \frac{1}{2} (M_{\cdot} \pm |M_{\cdot}|) & \text{pro } |M_{\cdot}| > 1 \quad (\text{nadzvuk}) \end{cases}$$

$M_{\cdot} \pm 1$  kde " $\cdot$ "  $\in \{L, R\}$  je charakt. rychlost zhruba vlny (projekce do směru  $\vec{n}_{L,G}$ ) blíží se od L, resp. R k  $G$

Zpracování fluka:

$$P_G = P_L^+ + P_R^-, \text{ kde}$$

každé polyn. 3. st  
v  $M_{\cdot}$

$$P_{\cdot}^{\pm} = \begin{cases} \frac{P_{\cdot}}{4} (M_{\cdot} + 1)^2 (2 \mp M_{\cdot}) & \text{pro } |M_{\cdot}| \leq 1 \\ \frac{P_{\cdot}}{2} (M_{\cdot} \pm |M_{\cdot}|) / M_{\cdot} & \text{pro } |M_{\cdot}| > 1 \end{cases}$$

$\in \{2, 0\}$



valzení polyn. 1. st. v  $M$ .

$$P_{\bullet}^{\pm} = \begin{cases} \frac{p}{2}(1 \pm M) & \text{pro } |M| \leq 1 \\ \frac{p}{2}(M \pm |M|)/M & \text{pro } |M| > 1 \end{cases}$$

rozšíření:  $\swarrow$  AUSM+  
CUSP

Flux Difference Splitting - Roe's upwind scheme [Blazek, str. 104]

$$\partial_t \vec{W} + \partial_{x_1} \vec{F} + \partial_{x_2} \vec{G} \approx \partial_t \vec{W} + \underbrace{\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{W}}}_{\text{Jacobitko matice}} \partial_{x_1} \vec{W} + \underbrace{\frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{W}}}_{\text{Jacobitko matice}} \partial_{x_2} \vec{W}$$

$$\begin{pmatrix} p \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho h \end{pmatrix}$$

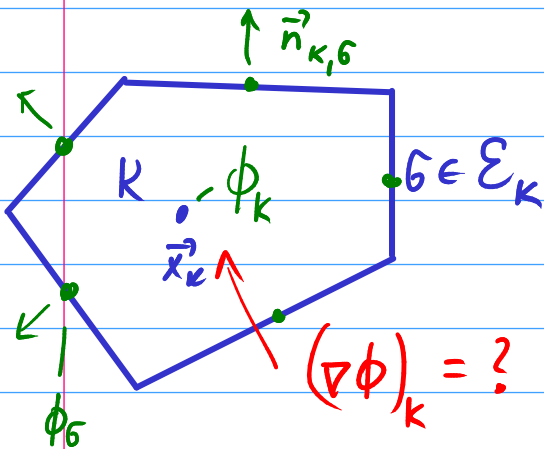
Jacobitko matice  
 $\Rightarrow$  approximate Roe's matice  $A_{Roe}^{(F)}$   
 $A_{Roe}^{(G)}$

$$A_{Roe}^{(F)} = R^T \Lambda R$$

## Aproximace gradientu

motivace  $\left\{ \begin{array}{l} \text{vzájemné toky } \vec{R}, \vec{S} \dots \text{ obsahují derivace } \partial_i V_k \\ \text{na } \mathcal{G} \Rightarrow \text{nutnost aproximace } \nabla \vec{V} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \\ \text{na stěně} \\ \text{aproximace vzdálených "virtuálních" uzlů pro} \\ \text{upwind 2. řádu (SOU, FROMM, QUICK, TVD...)} \\ \Rightarrow \text{nutnost znát } \nabla \phi \text{ } \phi \in \mathcal{E} \rho_1, \rho_2, \dots \} \\ \text{ve středech buněk}
 \end{array} \right.$

## GRADIENTY VE STŘEDECH BUNĚK



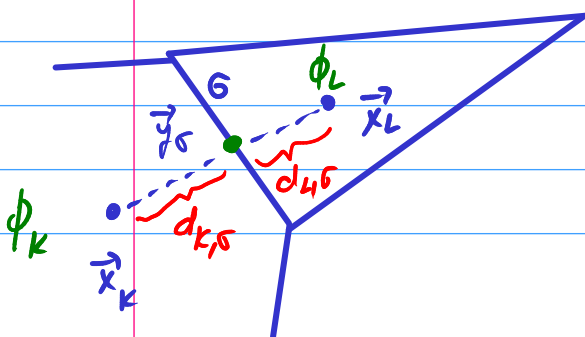
1) Gaussova - Greenova aproximace

$$\int_K \partial_i \phi d\vec{x} = \int_{\partial K} \phi n_i dS$$

*sloužky pod sebou*

$$\int_K \nabla \phi d\vec{x} = \int_{\partial K} \phi \vec{n} dS$$

$$(\nabla \phi)_k = \frac{1}{m(K)} \sum_{\mathcal{G} \in \mathcal{E}_K} m(\mathcal{G}) \phi_{\mathcal{G}} \vec{n}_{k,\mathcal{G}}$$

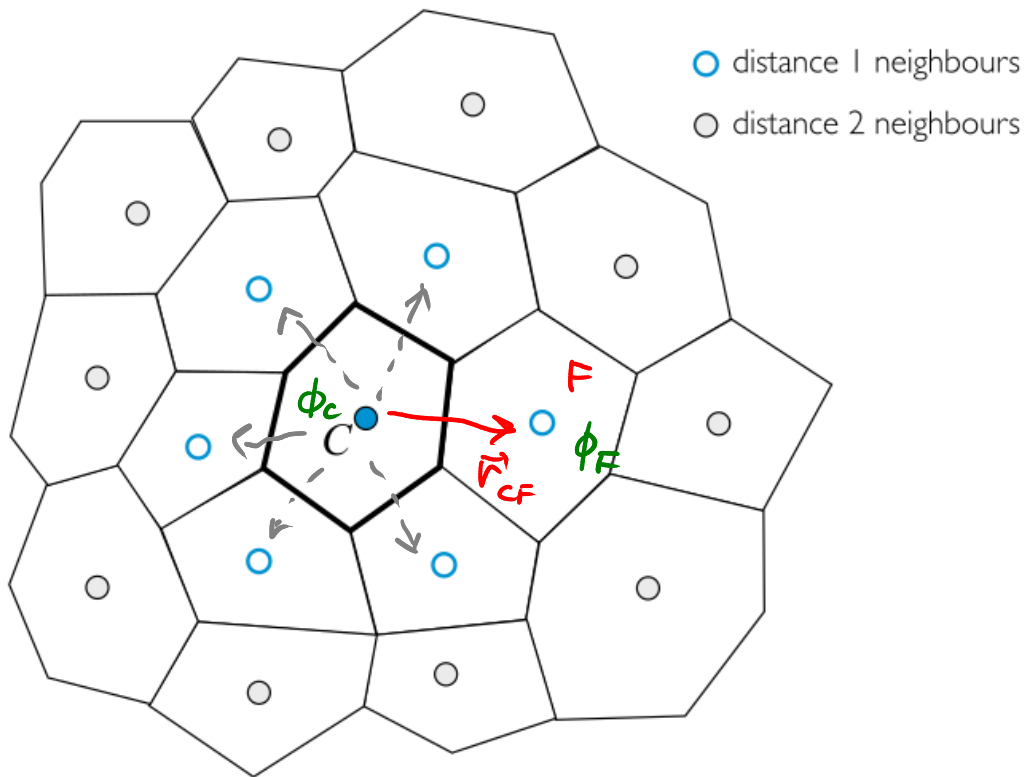


$$\phi_{\mathcal{G}} = \frac{1}{2} (\phi_k + \phi_L) \quad (1. \text{ řádek})$$

nebo přerůjní lin. interpolaci (2. řádek)

$$\phi_{\mathcal{G}} = \frac{d_{k,\mathcal{G}}}{\mathcal{D}_{KL}} \phi_L + \frac{d_{L,\mathcal{G}}}{\mathcal{D}_{KL}} \phi_k$$

2) aproximační gradientní metoda nejmenších čtverců



$$\phi_F \approx \phi_C + (\nabla\phi)_C \cdot \underbrace{(\mathbf{r}_F - \mathbf{r}_C)}_{\mathbf{r}_{CF}} + \mathcal{O}(|\vec{r}_{CF}|^2)$$

(přes všechny sousední buňky C

minimalizujeme

$$G_C = \sum_{k=1}^{NB(C)} \left\{ w_k \left[ \phi_{F_k} - (\phi_C + \nabla\phi_C \cdot \mathbf{r}_{CF_k}) \right]^2 \right\}$$

váhy

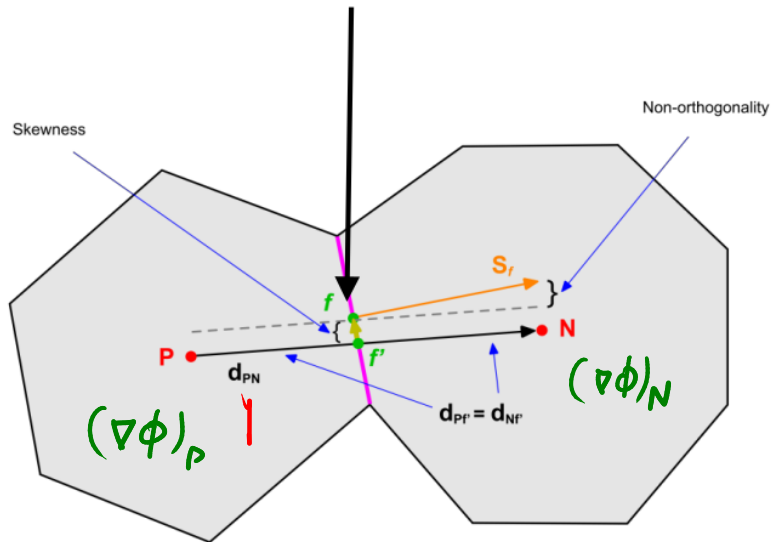
stat. hodnota

aproximace

# APPROXIMATION GRADIENTU NA STĚNA'CH

nejjednodušší

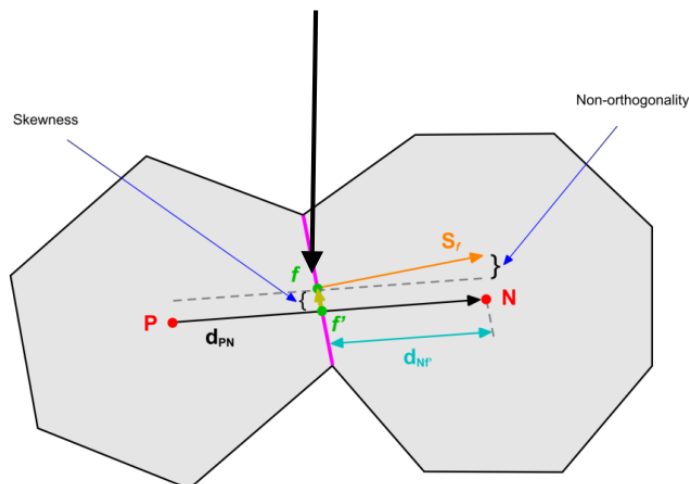
$$\nabla\phi_f = \frac{\nabla\phi_P + \nabla\phi_N}{2}$$



lin. interpolace

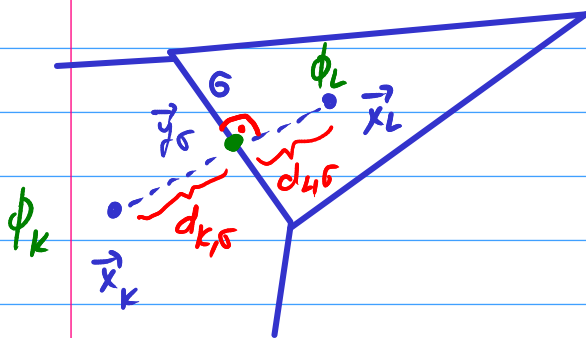
$$\nabla\phi_f = f_x \nabla\phi_P + (1 - f_x) \nabla\phi_N \quad \text{where} \quad f_x = \frac{fN}{PN}$$

$\frac{d_{PN}}{PN}$



Pozná: nestlačit - proudění  $\nabla \cdot \vec{\Pi}_D \rightarrow \mu \Delta \vec{V}$

Green:  $\int_K \Delta \vec{V} d\vec{x} = \int \nabla \vec{V} \cdot \vec{n} dS$   
 $\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{n}} \dots$  diletěte'



$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \right)_\sigma \approx \frac{\phi_L - \phi_K}{D_{KL}} + O(D_{KL}^2)$$

pokud  $\perp$  !!

KOREKCE:  $(\nabla \phi)_\sigma$  upravíme tak, aby

$$\vec{d}_{KL} := \frac{(\vec{x}_L - \vec{x}_K)}{D_{KL}} \quad (\nabla \phi)_\sigma \cdot \vec{d}_{KL} \stackrel{!}{=} \frac{\phi_L - \phi_K}{D_{KL}}$$

$$\Rightarrow (\nabla \phi)_\sigma^{corr} = (\nabla \phi)_\sigma + \left( \frac{\phi_L - \phi_K}{D_{KL}} - (\nabla \phi)_\sigma \cdot \vec{d}_{KL} \right) \vec{d}_{KL}$$

statečně!

$$\Rightarrow (\nabla \phi)_\sigma^{corr} \cdot \vec{d}_{KL} = (\nabla \phi)_\sigma \cdot \vec{d}_{KL} + \frac{\phi_L - \phi_K}{D_{KL}} \underbrace{(\vec{d}_{KL} \cdot \vec{d}_{KL})}_{=1} - \underbrace{\left( (\nabla \phi)_\sigma \cdot \vec{d}_{KL} \right) (\vec{d}_{KL} \cdot \vec{d}_{KL})}_{=1}$$

$\Rightarrow$  automaticky umožníte přesně spočítat

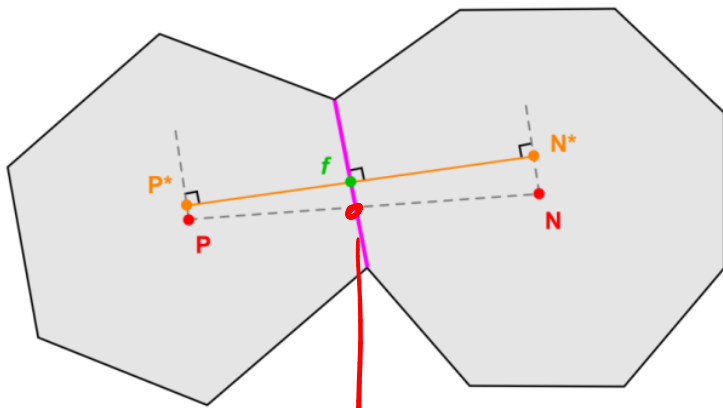
$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} = (\nabla \phi)_\sigma^{corr} \cdot \vec{n}, \text{ a to i když } \vec{n} \nparallel \vec{d}_{KL}$$

Pozn : Neortogonální (= nepřímé) síťe

Další možnost výpočtu  $\frac{\partial \phi}{\partial \vec{u}}$  se zúčastí gradientů v blízkosti

$$\phi_N^* = \phi_N + \nabla \phi_N \cdot \mathbf{d}_{N^*N}$$

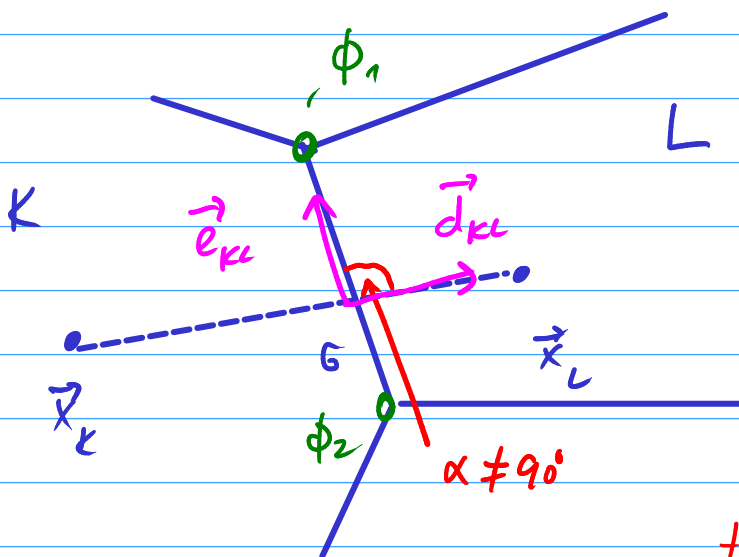
$$\phi_P^* = \phi_P + \nabla \phi_P \cdot \mathbf{d}_{P^*P}$$



$$\Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial \vec{u}} = \frac{\phi_{N^*} - \phi_{P^*}}{|\mathbf{d}|_{P^*N^*}}$$

zde není  $\perp$  (t)

Další možnost ve (2D) k rekonstrukci  $(\nabla \phi)_G$



$$\Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial \vec{d}_{KL}} \approx \frac{\phi_L - \phi_K}{D_{KL}}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{e}_{KL}} \approx \frac{\phi_1 - \phi_2}{m(G)}$$

transformace  
báze



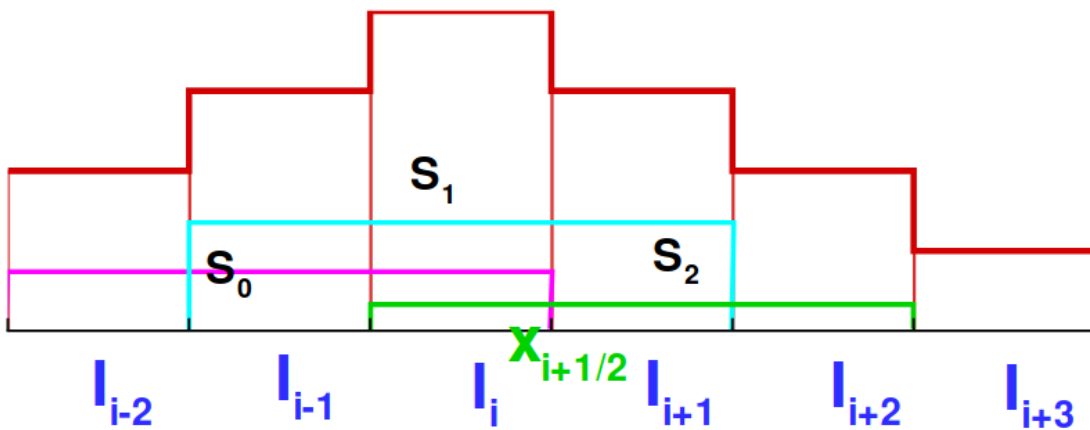
specifické  $(\nabla \phi)_G, \frac{\partial \phi}{\partial \vec{u}}$

# METODY VYSOKÉ RÁDU (část 2)



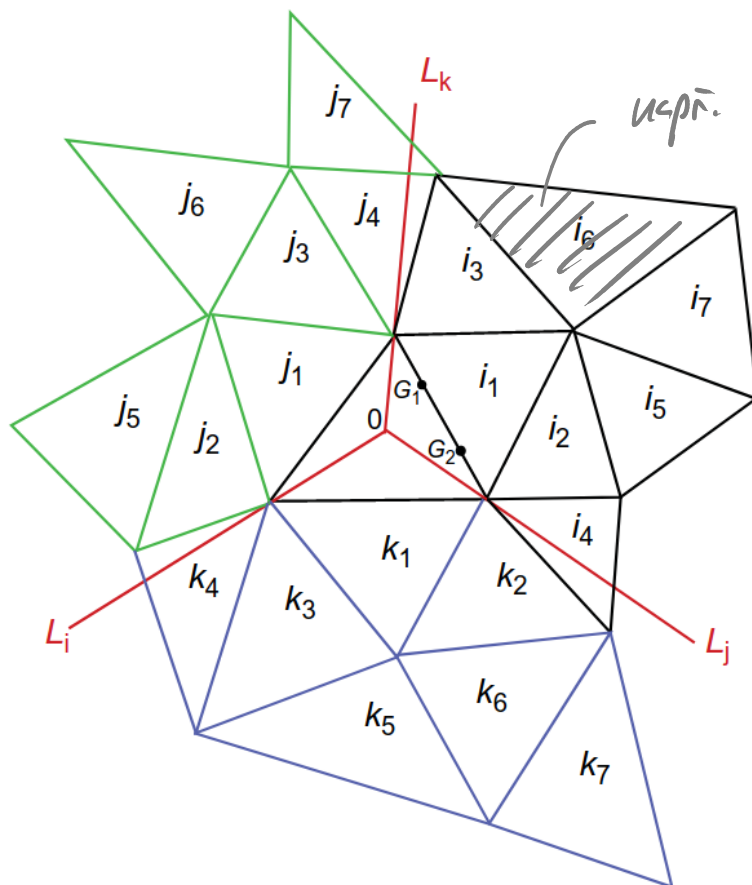
ENO - essentially non-oscillatory  
 WENO - weighted ENO

- adaptivní stencil (vynechání "nepojitých" buněk)



- polynomiální interpolace (Lagrange)

- kritérium hladkosti



uopr.  $i_6$  nechci, protože vyplývá krit. hladkosti

# High Order Finite Difference and Finite Volume WENO Schemes and Discontinuous Galerkin Methods for CFD

Chi-Wang Shu<sup>1</sup>

Division of Applied Mathematics

Brown University

Providence, Rhode Island 02912

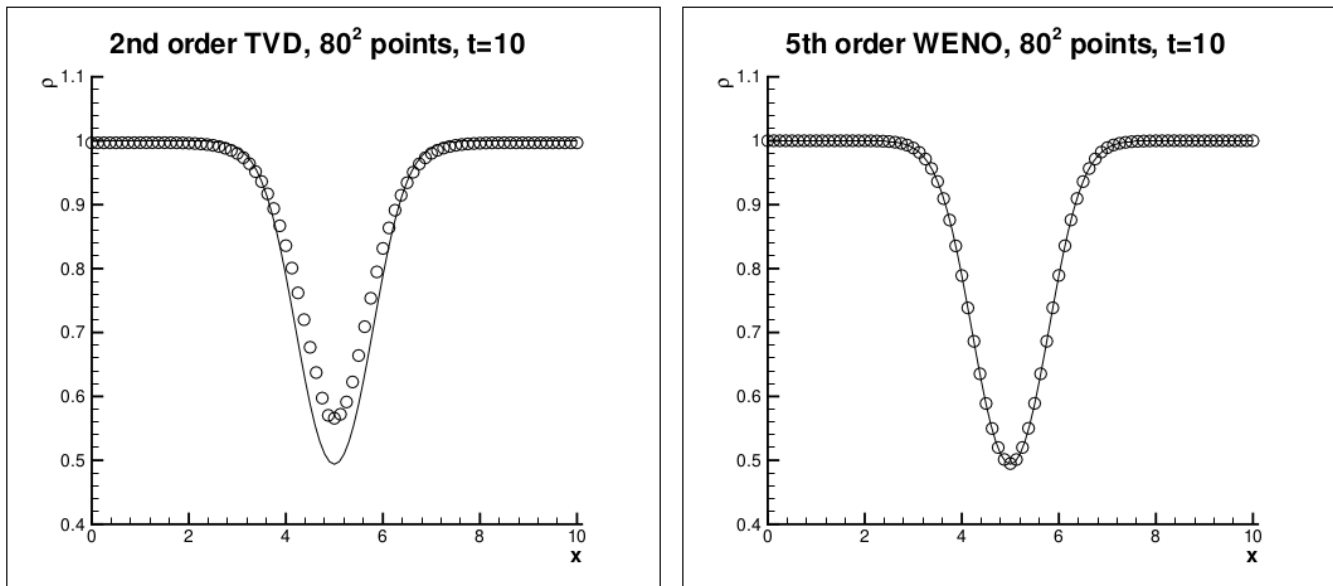


Figure 1.1: Vortex evolution. Cut at  $x = 5$ . Density  $\rho$ .  $80^2$  uniform mesh.  $t = 10$  (after one time period). Solid: exact solution; circles: computed solution. Left: second order TVD scheme; right: fifth order WENO scheme.

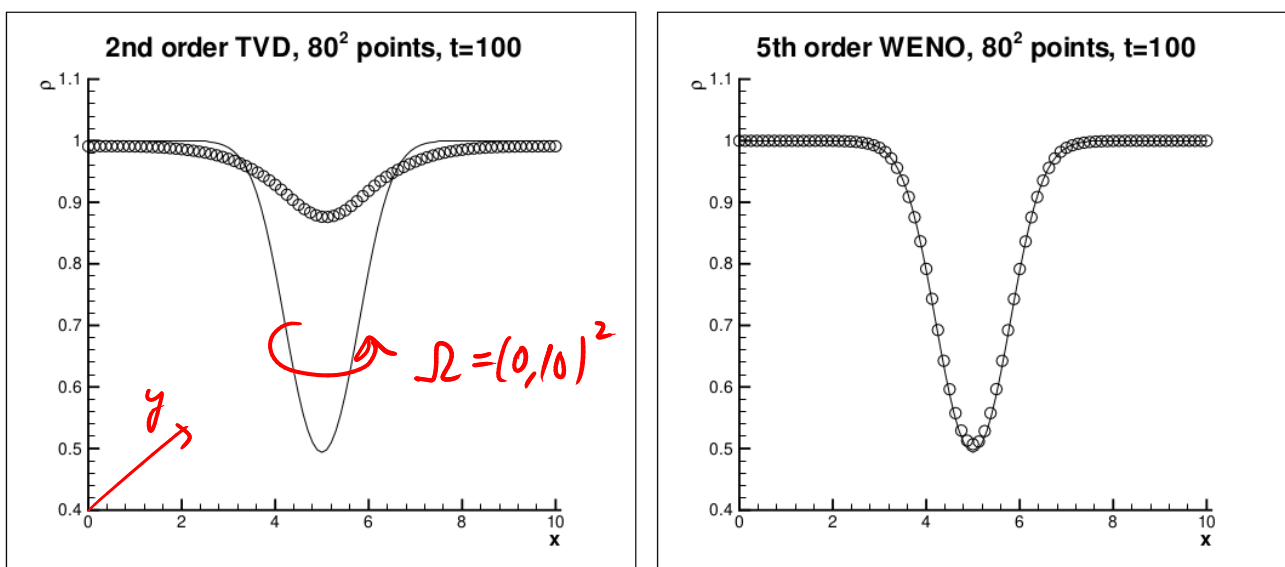


Figure 1.2: Vortex evolution. Cut at  $x = 5$ . Density  $\rho$ .  $80^2$  uniform mesh.  $t = 100$  (after 10 time periods). Solid: exact solution; circles: computed solution. Left: second order TVD scheme; right: fifth order WENO scheme.



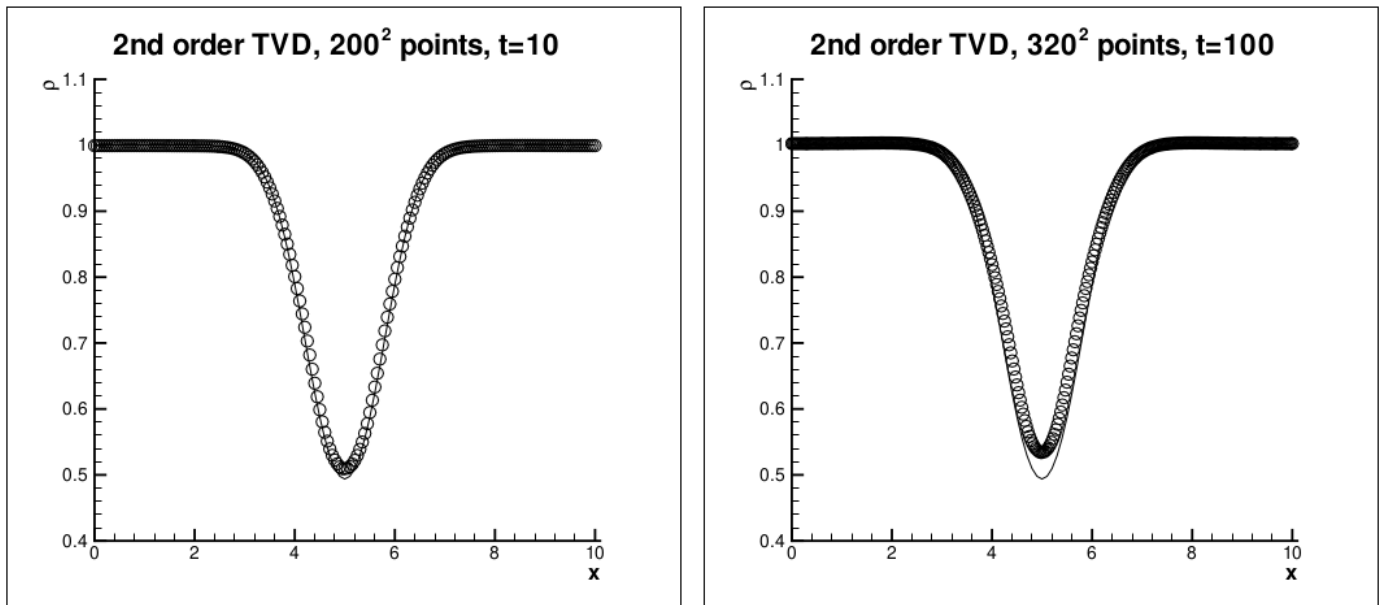


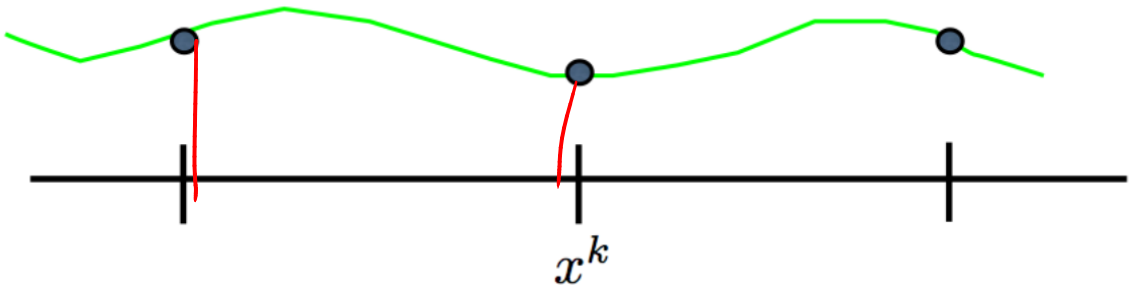
Figure 1.3: Vortex evolution. Cut at  $x = 5$ . Density  $\rho$ . Second order TVD scheme. Solid: exact solution; circles: computed solution. Left:  $200^2$  uniform mesh,  $t = 10$  (after one time period); right:  $320^2$  uniform mesh,  $t = 100$  (after 10 time periods).

"DG"

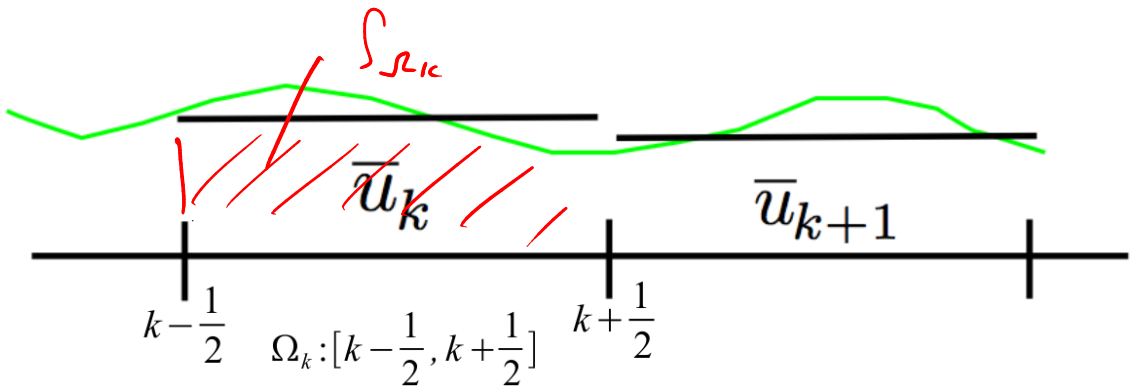
Discontinuous Galerkin

řetěem' je nepojité mezi elementy  
bážíve' to nemáme' jen na svých  
elementech

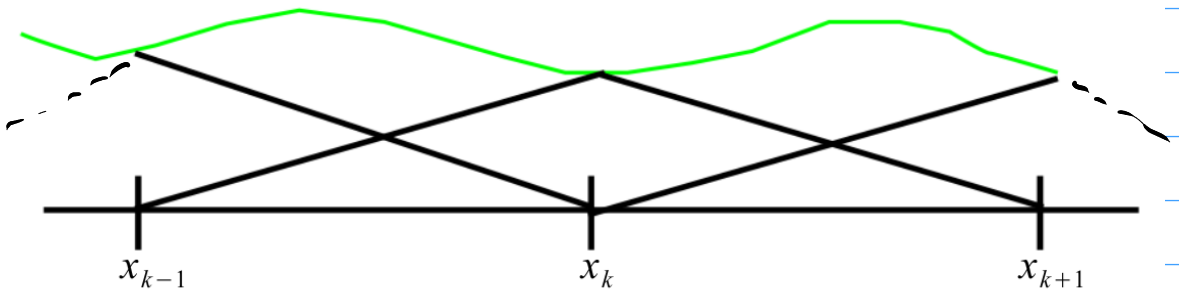
FDM



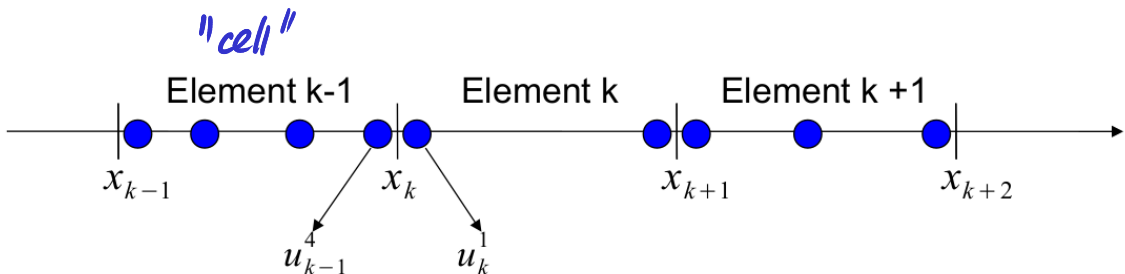
FVM



FEM



DG



lokální Galerkinová metoda na každém  $\Omega_k$

metody řešení nestlačitelnosti

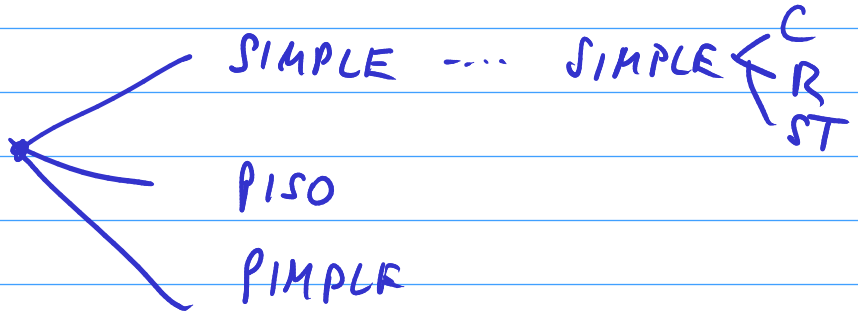
$$\text{ZZHm} \Leftrightarrow \nabla \cdot \vec{V} = 0$$

$$\text{ZZHyb} \Leftrightarrow \text{NS} \dots \text{obrazy!} \nabla P$$

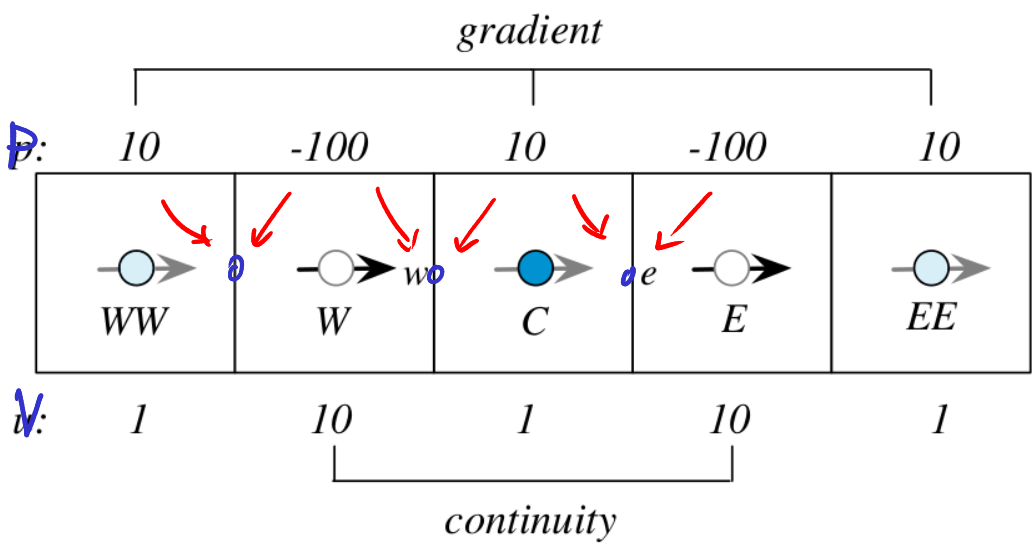


Poissonova rovnice pro tlak

Princip num. řešení: predikce (-) korekce



PROBLEM "SACHOVNICOVÝ" / "decoupling"



$$\int_C \frac{\partial P}{\partial x} dx = (P_e - P_w)_m(C) = 0$$

⇒ STAGGERED GRID (střídavá síť)

- rychlosti uloženy na stěnách
- skalární veličiny ve středech buněk

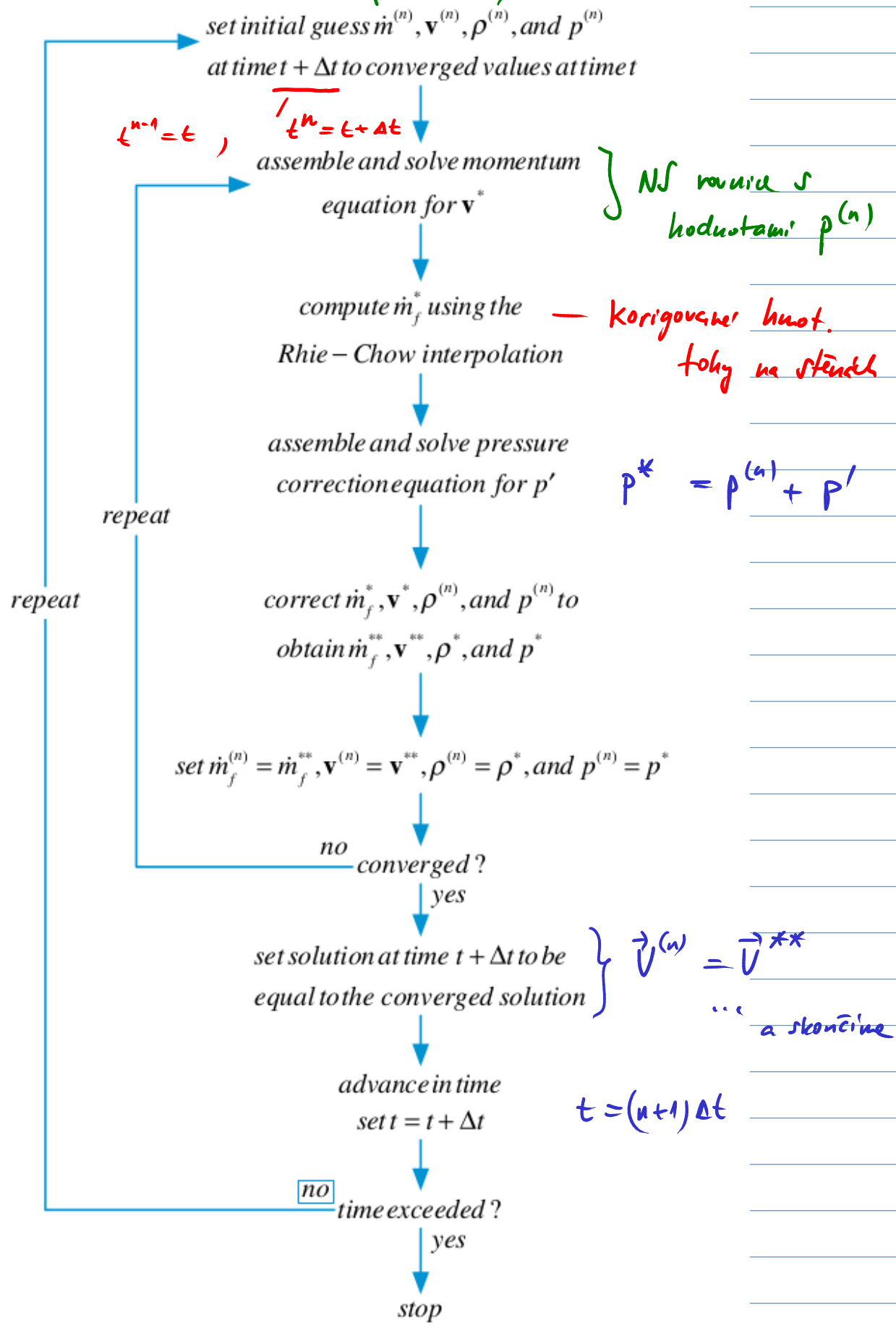
- nevýhody zejména ne nestabilit. síťek

ALTERNATIVA - speciální typ interpolace na cell-centered síťech  
(Rhie-Chowova interpolace)

$$\begin{aligned} \overline{D_f^u \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_f} - \overline{D_f^u \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_f} &= \frac{1}{2} \left( D_C^u \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_C + D_F^u \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_F \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} (D_C^u + D_F^u) \times \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_C + \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_F \right) \\ &= \frac{1}{4} D_C^u \left( \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_C - \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_F \right) + \frac{1}{4} D_F^u \left( \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_F - \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_C \right) \\ &\approx O(\Delta x^2) \end{aligned}$$

SIMPLE :

hmot. toky p̄er stěny / rychlosti pole v čase n·Δt  
 pole hustoty / tlaku  
 — " —



varianty a vylepšení : SIMPLE  $\left\{ \begin{array}{l} C \\ R \\ ST \end{array} \right\}$  PIMPLE  
PISO  
vše je v OpenFOAMu

POZN : pro stlačitelné proudění

↖ "přímotařné" řešení :  $\rho, \vec{V} \dots p = \text{EOS}(\rho, T)$   
(density-based solver)

↖ používat korekční rovnice pro tlak :  $p, \vec{V}$   
(pressure-based solver)

# METODY ČASOVÉ INTEGRACE

pozn: Metoda přírvek:  $\partial_t \vec{u} + L_{\vec{x}} \vec{u} = f$

$u: (0, t_{max}) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$u_h: (0, t_{max}) \rightarrow \mathcal{J}_h$

prostor  
sít. bodů  
na  $\Omega$

$$\partial_t u_h + L_{\vec{x}_h} u_h = f_h$$

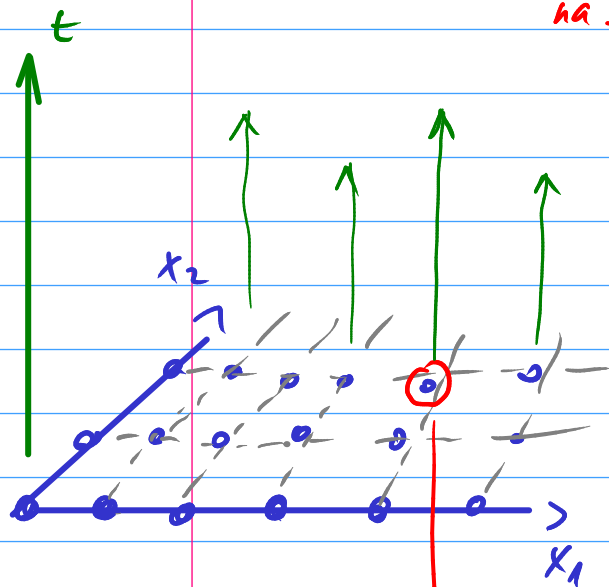
} konečný  
počet  
ODR

operator  
prostorové diskretizace  
(MKO; MKO...)

$$\dot{\vec{u}} = \vec{F}(\vec{u})$$

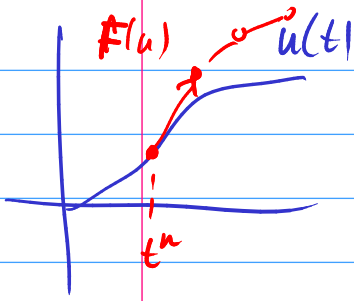
$\vec{u}$  obsahuje hodnoty  $u_h$  v jednotlivých  
uzlech sítě (MKO), resp. v jednotlivých  
buněčkách (MKO)

$$[u_h(t)]_{ij} = \underbrace{(u_h(t))}_{\in \mathcal{J}_h} (\vec{x}_{ij})$$



## RUNGE-KUTTOVY METODY

m-kroková RK metoda pro řešení  $\dot{\vec{u}} = \vec{F}(t, \vec{u})$



$$\vec{K}_l = \vec{F}\left(t^n + c_l \Delta t, \vec{u}^n + \Delta t \sum_{j=1}^m a_{jl} \vec{K}_j\right)$$

$$l = 1, \dots, m$$

a nakonec 
$$\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^n + \Delta t \sum_{l=1}^m b_l \vec{K}_l$$

zřejmě (intuitivně) 
$$c_l = \sum_{k=1}^m a_{lk}$$

Butcherova  
tabulka

explicitní  
RK metod

$c_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	$\dots$	$a_{1m}$
$c_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	$\dots$	$a_{2m}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$c_m$	$a_{m1}$	$a_{m2}$	$\dots$	$a_{mm}$
	$b_1$	$b_2$	$\dots$	$b_m$

$$\left(\sum_{k=1}^m b_k = 1\right)$$

pokud zde je  
nenulová hodnota,  
jde o implicitní  
RK metod,  
(alespoň v  
1 kroku)

např. tzv. klasická  
RK  
metoda  
4. řádu

0	0	0	0	0
1/2	1/2	0	0	0
1/2	0	1/2	0	0
1	0	0	1	0
	1/6	1/3	1/3	1/6

... pro "stifft"  
soustav  
rovníc



6-kroková RK: jednoduché diagonální implicitní metoda

0	0	0	0	0	0	0	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	
$\frac{83}{250}$	$\frac{8611}{62500}$	$-\frac{1743}{31250}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	
$\frac{31}{50}$	$\frac{5012029}{34652500}$	$-\frac{654441}{2922500}$	$\frac{174375}{388108}$	$\frac{1}{4}$	0	0	
$\frac{17}{20}$	$\frac{15267082809}{155376265600}$	$-\frac{71443401}{120774400}$	$\frac{730878875}{902184768}$	$\frac{2285395}{8070912}$	$\frac{1}{4}$	0	
1	$\frac{82889}{524892}$	0	$\frac{15625}{83664}$	$\frac{69875}{102672}$	$-\frac{2260}{8211}$	$\frac{1}{4}$	
4. řádek	$b_k$	$\frac{82889}{524892}$	0	$\frac{15625}{83664}$	$\frac{69875}{102672}$	$-\frac{2260}{8211}$	$\frac{1}{4}$
2. řádek	$\hat{b}_k$	$\frac{4586570599}{29645900160}$	0	$\frac{178811875}{945068544}$	$\frac{814220225}{1159782912}$	$-\frac{3700637}{11593932}$	$\frac{61727}{225920}$

RK - Merronova metoda  
s adaptivní volbou  
(časového) kroku  
4. řádek

provede se vždy

$$\varepsilon < \delta \omega^5 \Leftrightarrow$$

$\tau$  se prodlouží!

$$\omega \doteq 0,8 \in (0,1)$$

```

 $\tau = \tau_{ini}; \mathbf{x}^T = \mathbf{x}_{ini}^T;$ 
while(1) {
    if(|T - t| < |\tau|) {
         $\tau = T - t;$  last=true;
    } else last=false;
     $\mathbf{K}_1 = f(t, \mathbf{x}^T);$ 
     $\mathbf{K}_2 = f\left(t + \frac{\tau}{3}, \mathbf{x}^T + \frac{\tau}{3}\mathbf{K}_1\right);$ 
     $\mathbf{K}_3 = f\left(t + \frac{\tau}{3}, \mathbf{x}^T + \frac{\tau}{6}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2)\right);$ 
     $\mathbf{K}_4 = f\left(t + \frac{\tau}{2}, \mathbf{x}^T + \frac{\tau}{8}(\mathbf{K}_1 + 3\mathbf{K}_3)\right);$ 
     $\mathbf{K}_5 = f\left(t + \tau, \mathbf{x}^T + \tau\left(\frac{1}{2}\mathbf{K}_1 - \frac{3}{2}\mathbf{K}_3 + 2\mathbf{K}_4\right)\right);$ 
     $\varepsilon = \max_{i \in \{1,2,\dots,n\}} \frac{\tau}{3} |0.2\mathbf{K}_1^i - 0.9\mathbf{K}_3^i + 0.8\mathbf{K}_4^i - 0.1\mathbf{K}_5^i|;$ 
    if( $\varepsilon < \delta$ ) {
         $\mathbf{x}^T = \mathbf{x}^T + \tau\left(\frac{1}{6}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_5) + \frac{2}{3}\mathbf{K}_4\right);$ 
         $t = t + \tau;$ 
        if(last) break;
        if( $\varepsilon == 0$ ) continue;
    }
     $\tau = \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^{0.2} \cdot \omega\tau;$ 
}

```

$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(t, \vec{x})$   
 $\tau = \Delta t$

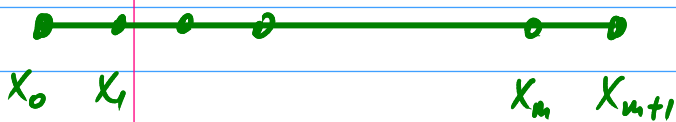
# IMPLICITNI SCHEMATA - REŠENÍ SOUSTAV UN. ROVIC

$\partial_t u + a \partial_x u = 0$  transport. rovnice  $\wedge$   $u(0) = u(1) = 0$   
na  $\Omega = (0, 1)$

$$\overleftarrow{\int_t} u_h^{dt} + a \overrightarrow{\int_x} u_h^{dt} = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\Delta t} + a \frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

$u_h^{dt} \in \mathcal{P}_h^{dt}$

PROSTOR. DISKRETIZACE



nebo

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} + a \frac{u_{k+1}^{n+1} - u_{k-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0$$

$$u_k^{n+1} + \underbrace{\frac{a\Delta t}{2\Delta x}}_{\alpha} (u_{k+1}^{n+1} - u_{k-1}^{n+1}) = u_k^n$$

soustava lin. rovnic pro  $u^{n+1}$

$$u^{n+1} = \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ \vdots \\ u_m^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha & 1 & \alpha & 0 & \dots \\ 0 & -\alpha & 1 & \alpha & \dots \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & -\alpha & 1 & \alpha \\ & & & & & & -\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_m^{n+1} \end{pmatrix} = u^n$$

$= u^n$

3 - diagonální

Toeplitzova

matice

$Au^{n+1} = u^n$

$\Rightarrow$  nutno najít  $A^{-1}$  ... závisle' na  $\Omega$

90 ar na síti a ne obvy. podun

$$\Rightarrow u^{n+1} = \bar{A}^{-1} u^n$$

inverze 3-diag. matice ma' uřechy prvky nenulové

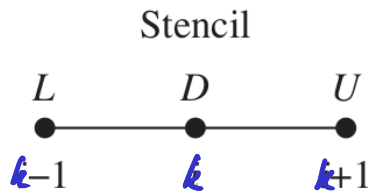
$\Rightarrow$   $u_k^{n+1}$  zduřir na  $u_l^n$  pro uřecha  $l = 1, \dots, m$   
 první

$\Rightarrow$  CFL podminka je splněna pro lib. hodnotu rychlosti  $a$

$\leftarrow$  implic. schéma je nepodmíněně stabilní (vina z Von Neumannovy podmínky)

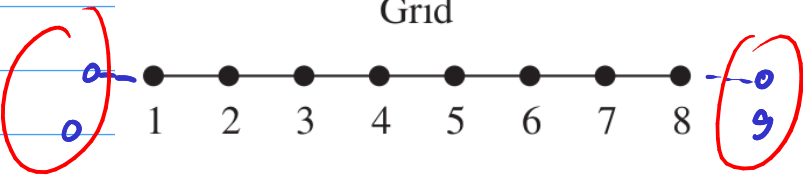
Struktury matice  $A$  pro úlohy v 1D, 2D :

v 1D:

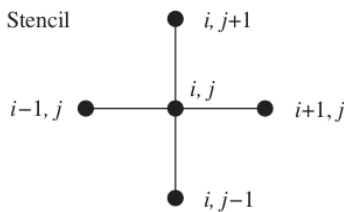


Implicit operator

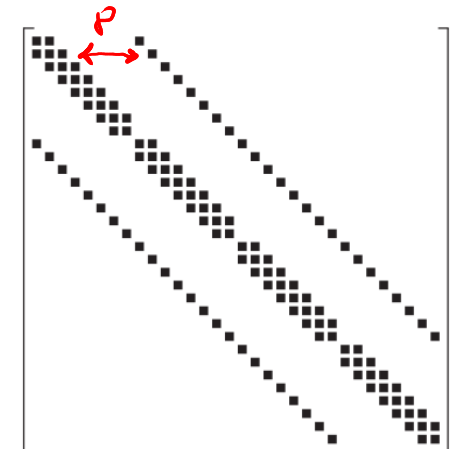
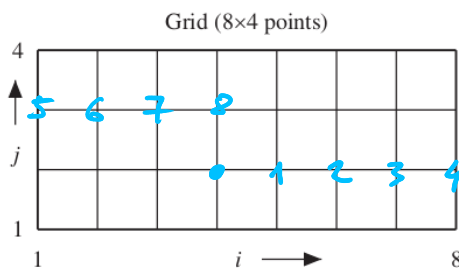
$$\begin{bmatrix} DU & \dots & 0 \\ LDU & & \\ & LDU & \\ & & LDU & \vdots \\ \vdots & & & LDU & \\ & & & & LDU & \\ 0 & \dots & & & & LD \end{bmatrix}^{8 \times 8}$$



okraj. podmín

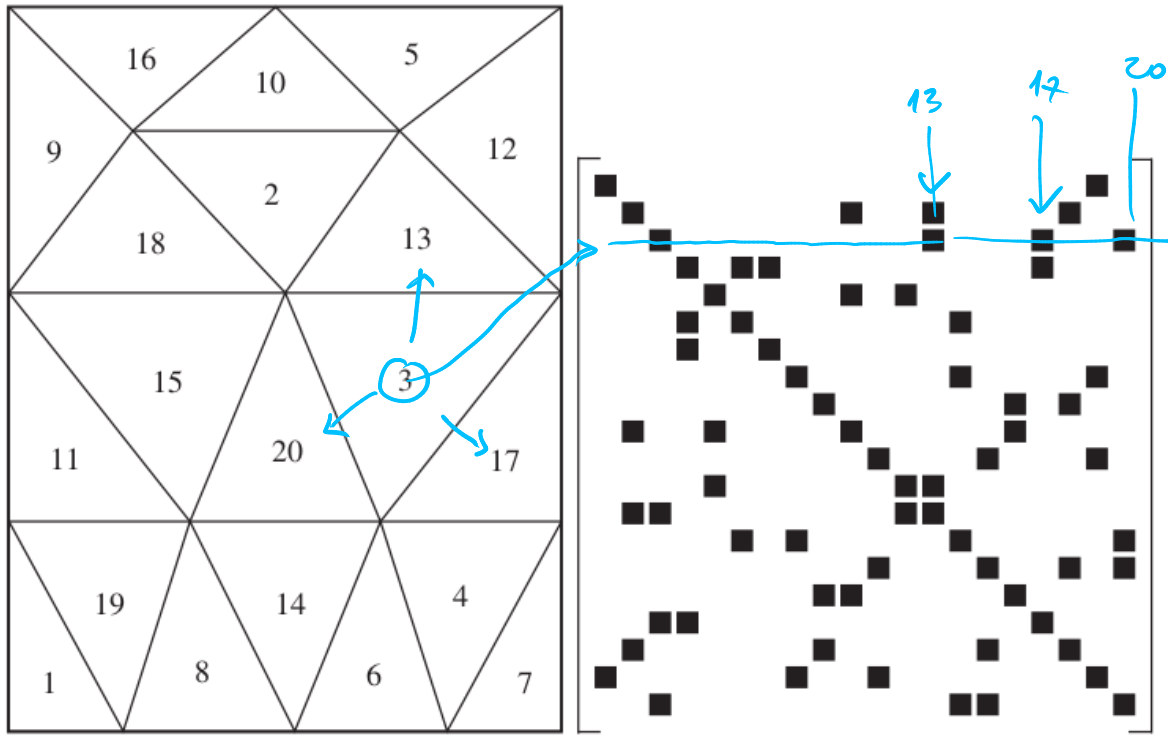


ve 2D



2D - nestrukturovaná síť:

zdroj:  
(Blazek - CFD - Principles & Practice 3rd ed.)



⇒ řídka matice ⇒ pro reprezentaci v počítači se hodí speciální formáty (CSR, ...)

↓ algoritmus seřazení složek  $u^{n+1}$

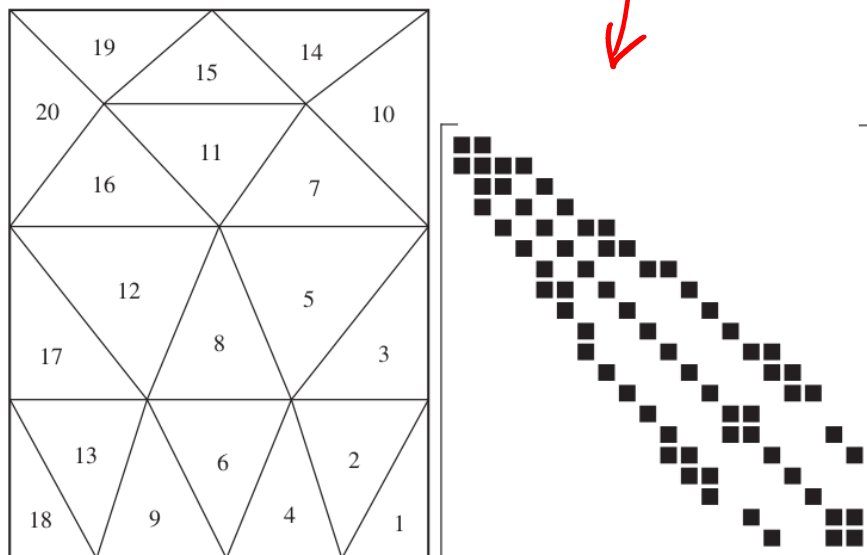


Figure 6.4 Reduced bandwidth (from 18 to 5) of the implicit operator from Fig. 6.3 with reverse-Cuthill-McKee ordering. Nonzero block matrices are displayed as filled rectangles.

$$A\vec{u} = \vec{f}$$

## ITERAČNÍ METODY ŘEŠENÍ $IA^{n+1} = u^n$

sucha najít aproximaci  $A^{-1} \Leftrightarrow$  předpodmíněná soustava

$$A\vec{u} = \vec{f}$$

$$\underbrace{M^{-1}A}_{\text{předpodmíněná}} \vec{u} = \underbrace{M^{-1}\vec{f}}_{\vec{r}^{(n)}} \quad \text{kde } M \text{ je regulární}$$

číslo podmíněnosti matice

$$\kappa = \|A\| \|A^{-1}\|$$

"lépe podmíněná"  $\Leftrightarrow$  pokud  $M^{-1}$  bude ještě aproximace  $A^{-1}$

### Obecné iterativní metody

$$\vec{u}^{(n+1)} = \vec{u}^{(n)} + M^{-1} \underbrace{(\vec{f} - A\vec{u}^{(n)})}_{\vec{r}^{(n)}} \quad \text{.. kdyby } M=A \text{ tak } \vec{u}^{(n+1)} = A^{-1}\vec{f}$$

REZIDUUM

$$\vec{e}^{(n)} = A^{-1}\vec{f} - \vec{u}^{(n)} \quad \text{CHYBA}$$

plch:  $A\vec{e}^{(n)} = \vec{r}^{(n)}$

$$\vec{e}^{(n+1)} = A^{-1}\vec{f} - \vec{u}^{(n+1)} = \underbrace{A^{-1}\vec{f} - \vec{u}^{(n)}}_{\vec{e}^{(n)}} - M^{-1}(\vec{f} - A\vec{u}^{(n)})$$

$$= \vec{e}^{(n)} - M^{-1}A(\underbrace{A^{-1}\vec{f} - \vec{u}^{(n)}}_{\vec{e}^{(n)}}) = \underbrace{(I - M^{-1}A)}_{\mathbb{R}} \vec{e}^{(n)}$$

existuje norma, která je libovolně blízko  $\rho(\mathbb{R})$

$$\|\vec{e}^{(n+1)}\| \leq \| \mathbb{R} \| \|\vec{e}^{(n)}\|$$

< 1  
vekt. normy konstantní s danou mat. normou

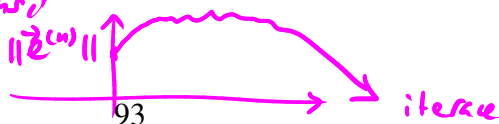
Metoda konverguje  $\Leftrightarrow \vec{e}^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

relaxační matice

v této (nezrušivé)  $\Leftrightarrow \rho(\mathbb{R}) < 1$

norma která chyba monotónně,

ale v euklidovské zdaleka nemusí!



Poznámka: Pokud  $\vec{e}^{(n)} = \sum_{j=1}^m \alpha_j \vec{v}_j$  kde  $(\vec{v}_j)_{j=1}^m$  jsou

vl. vektory IR  
přisloušící  $(\lambda_j)$  ( $|\lambda_j| < 1$ )

$$\vec{e}^{(n+1)} = R \left( \sum_{j=1}^m \alpha_j \vec{v}_j \right) = \sum_{j=1}^m \alpha_j R \vec{v}_j = \sum_{j=1}^m \alpha_j \lambda_j \vec{v}_j$$

Podobně  $|\lambda_j| \ll 1 \quad \forall j$ , pak  $\vec{e}^{(n)}$  konverguje k  $\vec{0}$  "rychle"  
 $\rho(R) \ll 1$

Příklad: Jacobiho iterativní metoda:  $A = -L + D - U$

$$\vec{u}^{(n+1)} = \vec{u}^{(n)} + M^{-1} (f - A\vec{u}^{(n)})$$

v J. metodě volíme  $M = D \Rightarrow M^{-1} = D^{-1}$  což umíme

$$D\vec{u}^{(n+1)} = D\vec{u}^{(n)} + (f - D\vec{u}^{(n)} + (L+U)\vec{u}^{(n)})$$

$$D\vec{u}^{(n+1)} - (L+U)\vec{u}^{(n)} = f$$

Pozn. - nejprve vl. čísla  $A$   
pro úlohu ještě jednodušší  
než

$$\delta_x u + a \delta_x u = 0,$$

protože tam by Jacobiho metoda nekonzvergovala

Poznámka: Rothho metoda

$$\partial_t u = \partial_{xx} u \quad \downarrow u = u(x)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \partial_{xx} u^{n+1}$$

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \partial_{xx} u^{n+1}$$

Řešence úlohy, kterou je nutné řešit iterativní metodou



Uvažujeme úlohu pro Poissonovu rovnici v 1D na  $\Omega = (0, 1)$

$$-u'' = f$$

s okraj. podmínkami  $u(0) = u(1) = 0$

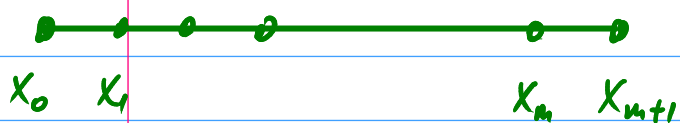
$$\Leftrightarrow -\delta_{xx} u_h = f_h$$

$$-\frac{u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1}}{\Delta x^2} = f_k$$

$\forall k = 1, \dots, m$

$u_k = 0$   
 $\forall k \in \{0, m+1\}$

PROSTOR DISKRETIZACE



$$\Rightarrow u_h \in \mathbb{R}^m$$

je soustava lin. rovnic ve tvaru

$$Au = f_h \quad \text{kde} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ukážeme, že vl. vektory  $A$  jsou  $\underline{(\vec{v}_j)_k} = \sin\left(\frac{j k \pi}{m+1}\right)$   $\forall j = 1, \dots, m$

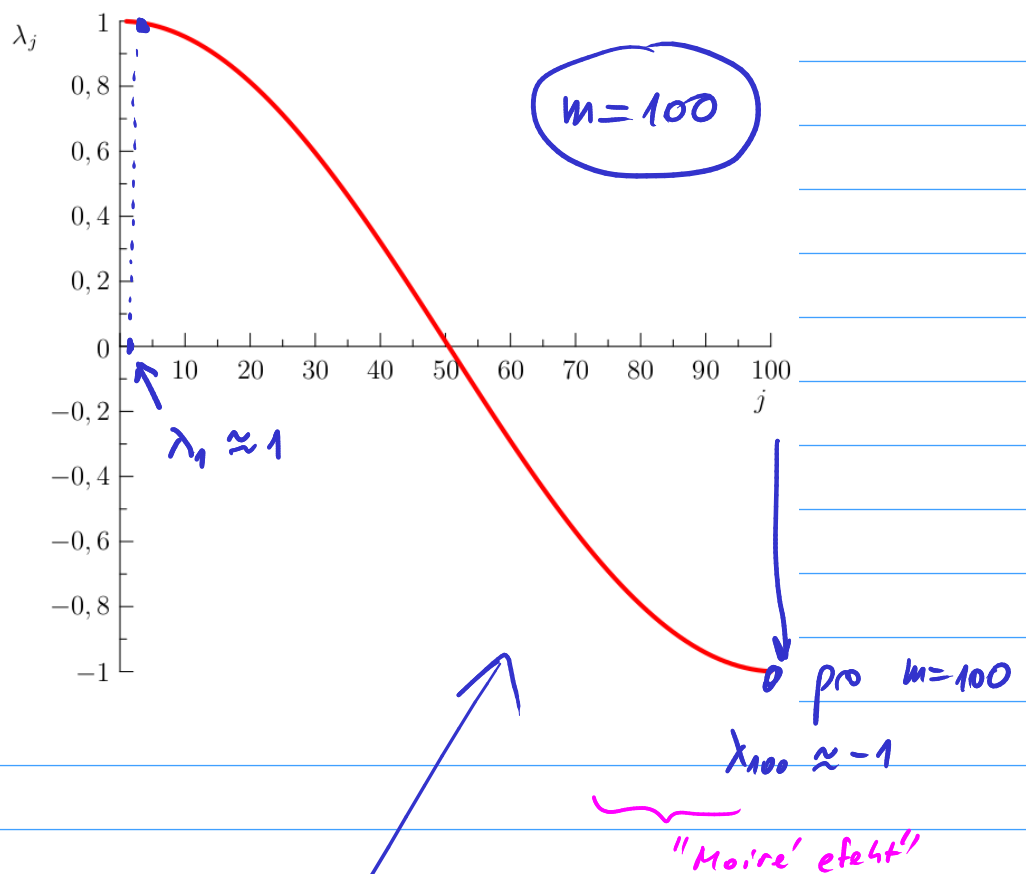
$\forall k = 1, 2, \dots, m-1, m$

$$\begin{aligned} (A \vec{v}_j)_k &= -\sin\left(\frac{j(k-1)\pi}{m+1}\right) + 2\sin\left(\frac{j k \pi}{m+1}\right) - \sin\left(\frac{j(k+1)\pi}{m+1}\right) \\ &= 2 \left(1 - \cos\left(\frac{j \pi}{m+1}\right)\right) \sin\left(\frac{j k \pi}{m+1}\right) \\ &= \tilde{\lambda}_j \sin\left(\frac{j k \pi}{m+1}\right) \end{aligned}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & \ddots & \\ & & 2 \end{pmatrix} \quad D^{-1} = \frac{1}{2} I$$

$$R = I - M^{-1}A = I - D^{-1}A = I - \frac{1}{2}A$$

$$\Rightarrow \lambda_j = 1 - \frac{1}{2} \tilde{\lambda}_j = 1 - \left( 1 - \cos\left(\frac{j\pi}{m+1}\right) \right) = \cos\left(\frac{j\pi}{m+1}\right)$$

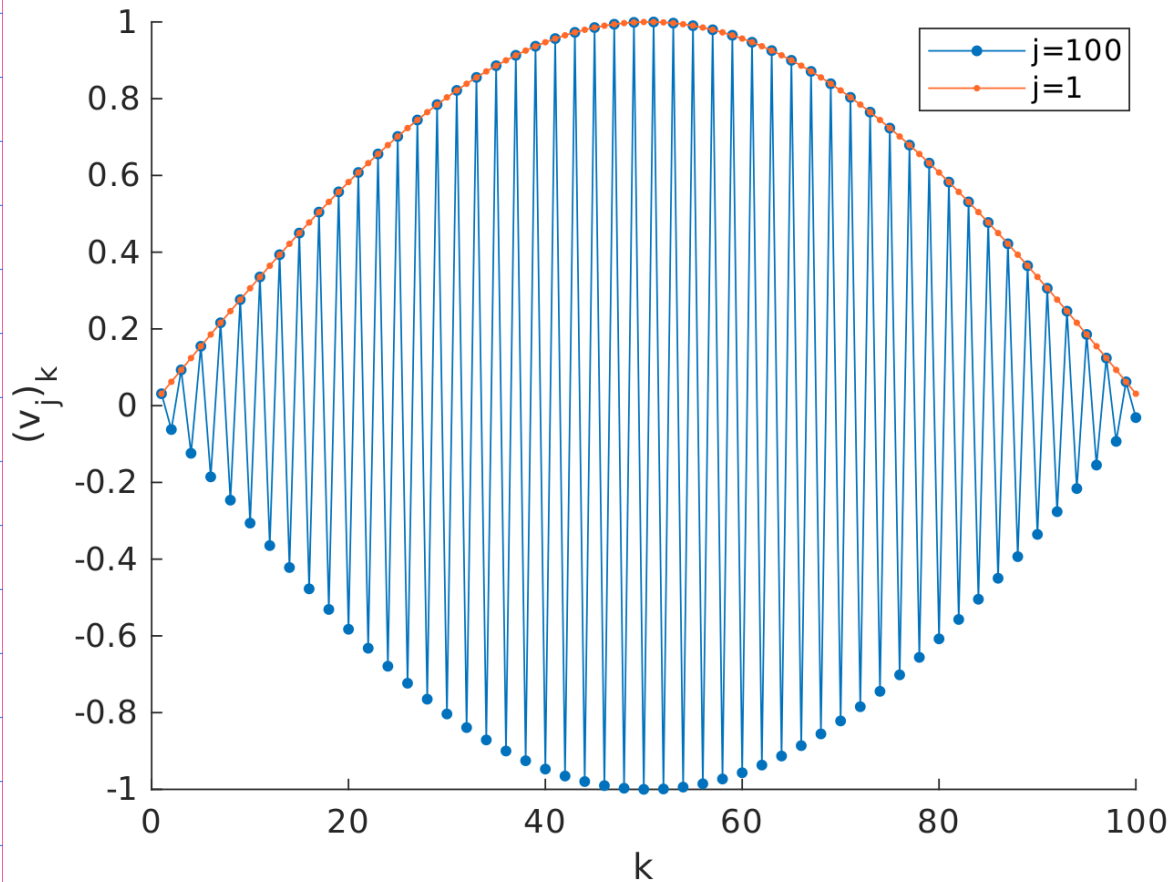


záporná vl. čísla ... pro  $j > \frac{m}{2}$

složky chyby střídají znaménko, ale v abs. hodnotě se chovají jako pro  $\lambda_\ell$ , kde  $\ell = m+1-j$



## Složky příslušných vlastních vektorů



=> Teorie TLUMENA' JACOBIHO METODA

Jacobi:

$$D\vec{u}^{(n+1)} - (L+U)\vec{u}^{(n)} = \vec{f}$$

$$D\vec{u}^* - (L+U)\vec{u}^{(n)} = \vec{f}$$

$$\vec{u}^{(n+1)} = \omega \vec{u}^* + (1-\omega)\vec{u}^{(n)}$$

$\omega = 1 \Rightarrow$  "obč." Jacobiho m.  $\omega \in (0,1)$

iteration:  $\vec{u}^{(k+1)} = \omega \left[ \vec{u}^{(k)} + D^{-1} (F - A\vec{u}^{(k)}) \right] + (1-\omega)\vec{u}^{(k)}$

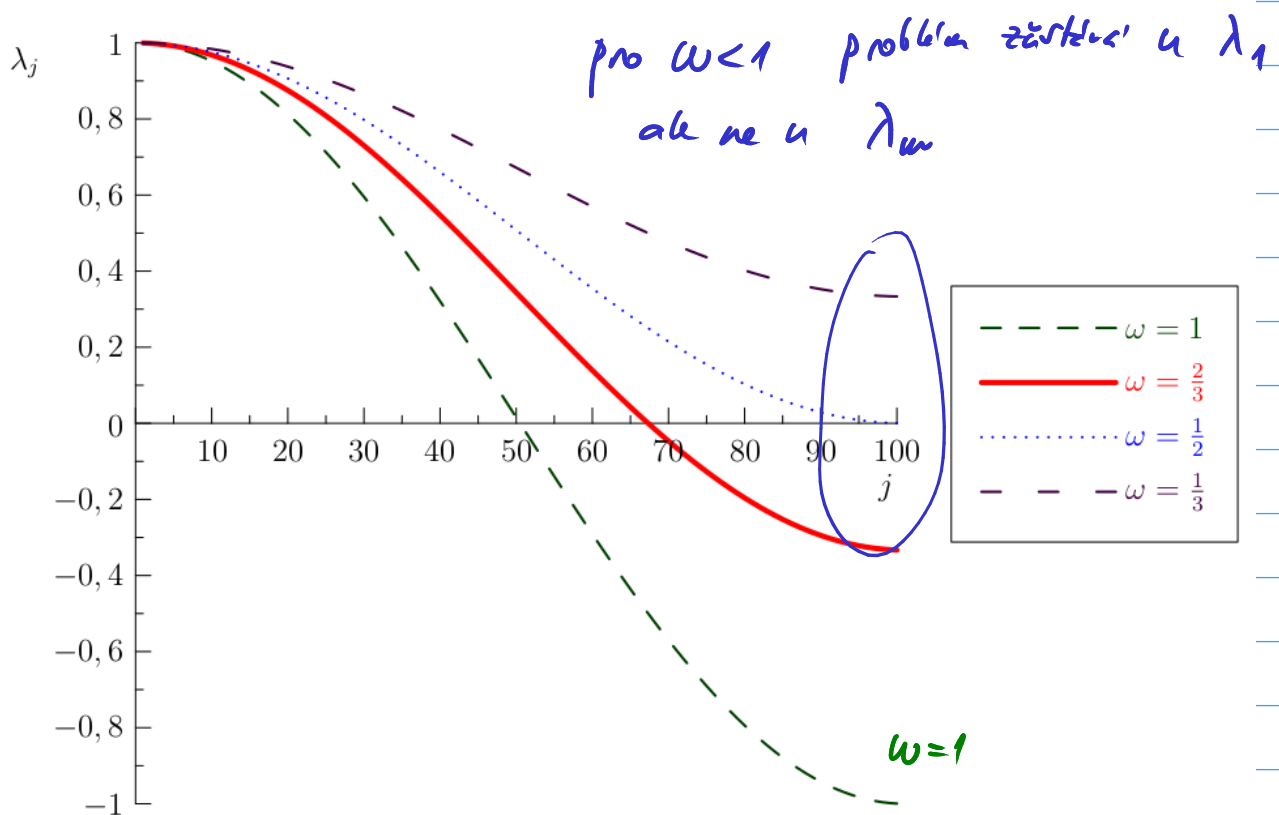
$$= \vec{u}^{(k)} + \underbrace{\omega D^{-1} (F - A\vec{u}^{(k)})}_{M^{-1}}$$

$t_j: \underline{M = \omega^{-1} D}$

$$R = I - M^{-1}A = I - \omega D^{-1}A = I - \frac{\omega}{2}A$$

$$\Rightarrow \lambda_j = 1 - \frac{\omega}{2} \tilde{\lambda}_j = 1 - \frac{\omega}{2} \cdot 2 \left( 1 - \cos \left( \frac{j\pi}{n+1} \right) \right)$$

$$= 1 - 2\omega \sin^2 \left( \frac{j\pi}{2(n+1)} \right)$$



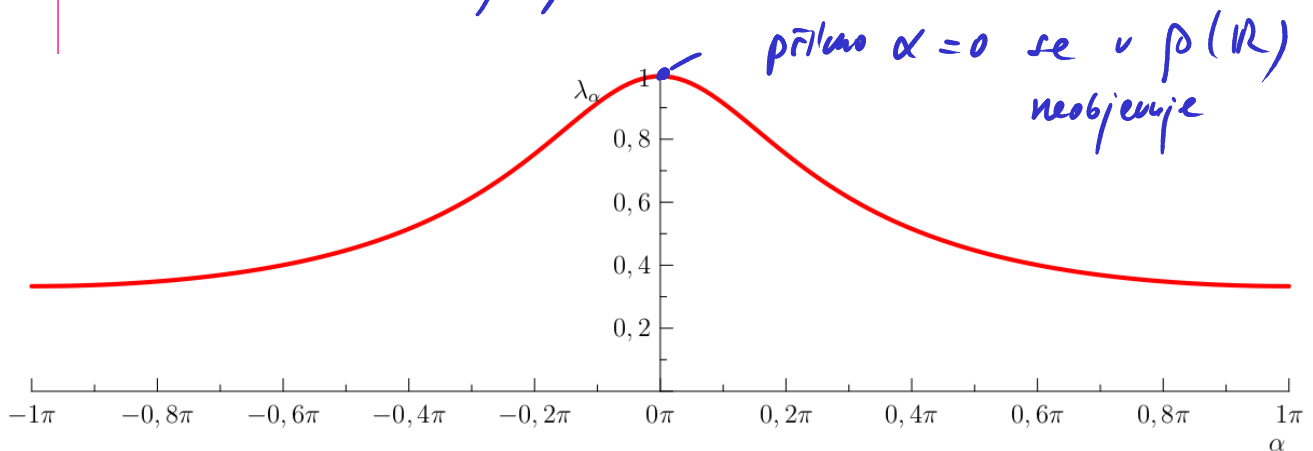
Pozn : Gaussova-Seidelova metoda :  $M = -L + D$

$$\Leftrightarrow (-L + D)\vec{u}^{(n+1)} - U\vec{u}^{(n)} = \vec{f}$$

ale  $\vec{v}_j, \lambda_j$  neumíme přesně spočítat

$\Rightarrow$  Von Neumannova spektrální analýza

$\Rightarrow$  obdobný výsledek



ŘEŠENÍ - URÝCHLENÍ KONVERGENCE

je METODA ŘEŠENÍ NA VÍCE SÍTÍCH  
tzv. MULTIGRID metoda

Uvažujme dvě sítě

- 1) o  $(m+2)$  prvcích (jemná)  
s krokem  $h = \Delta x$   
(m sude)

- 2) o  $\frac{m+2}{2}$  prvcích (hrubá)  
s krokem  $2h$

Def. operátory přechodu mezi sítěmi

$\vec{v}_{2h} = I_{h \uparrow}^{2h} \vec{v}_h$  kde  $v_{2h,k} = v_{h,2k}$  (restriktce)

funguje jen pro nulovou okraj. podm.

$\vec{v}_h = I_{2h \uparrow}^h \vec{v}_{2h} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 & 1 \\ & 2 \\ & 1 & 1 \\ & & \ddots \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 2 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \vec{v}_{2h}$  (interpolace)

$J \in \mathbb{R}^{(m+2) \times (\frac{m}{2}+1)}$

pozn : Restriktce lze i  $\vec{v}_{2h} = I_h^{2h} \vec{u}_h = J^T \vec{v}_h$

Korekční schéma na 2 sítích

řešíme  $A\vec{u} = \vec{f}$  na 2 sítích :

$A_h \vec{u}_h = \vec{f}_h$  (jemná) ,  $A_{2h} \vec{u}_{2h} = \vec{f}_{2h}$  (hrubá)

1) provedeme několik ( $\nu_n$ ) iterací řešení  $A_h \vec{u}_h = \vec{f}_h$  na jemné síti

$\Rightarrow$  spočítáme  $\vec{r}_h$

2) omezuje  $\nu$  ze sítě "h" na "2h" :  $\vec{r}_{2h} = I_h^{2h} \vec{r}_h$

(přisloucí chyba  $\vec{e}_h$ , a tedy ani  $\vec{r}_h$  už neobtahuje vysokofrekvenční složky)

$A_{2h} \vec{e}_{2h} = \vec{r}_{2h}$

3) provedeme  $V_2$  iterací řešení  $A_{2h} \vec{e}_{2h} = \vec{r}_{2h}$  na hrubší síti "2h"  $\Rightarrow$  utlumí se rychleji i nižší frekvence chyby

4) interpolujeme  $\vec{e}_{2h}$  na jemnější síť  $\vec{e}_h = I_{2h}^h \vec{e}_{2h}$   
a provedeme opravu  $\vec{u}_h := \vec{u}_h + \vec{e}_h$

5) provedeme  $V_2$  iterací řešení  $A_h \vec{u}_h = \vec{f}_h$  opět na jemnější síti s krokem "h"

Zobecnění – přechody mezi více úrovněmi sítí

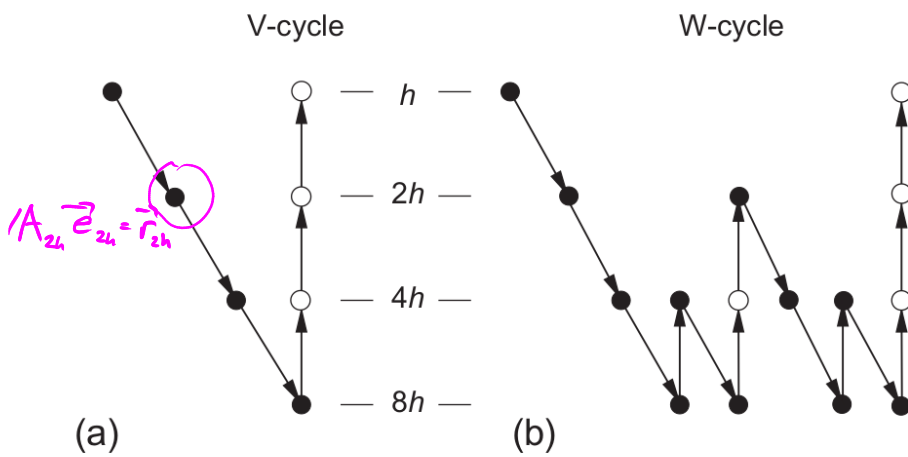
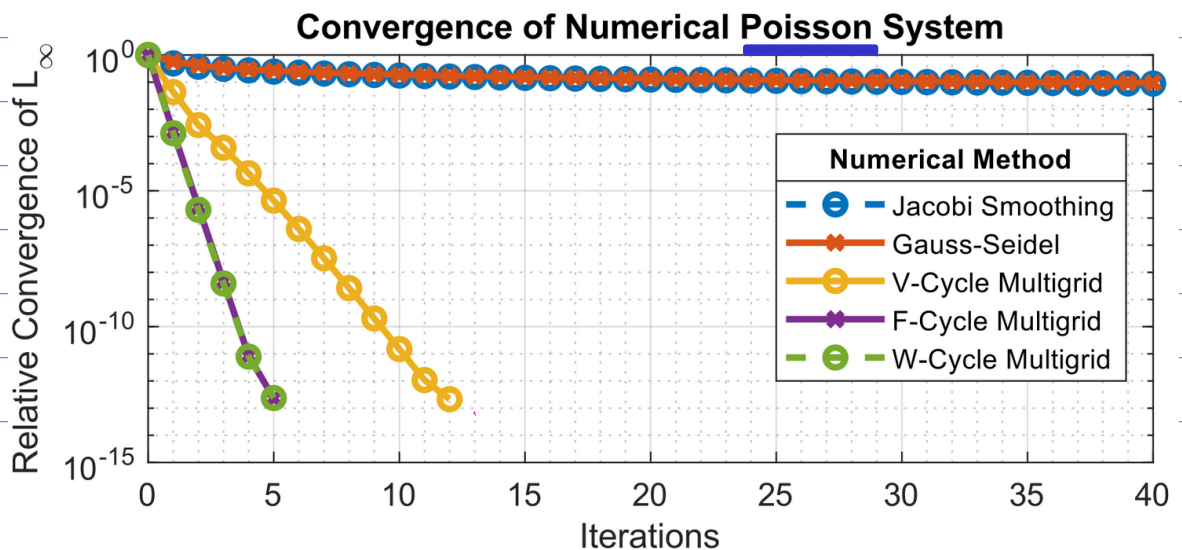
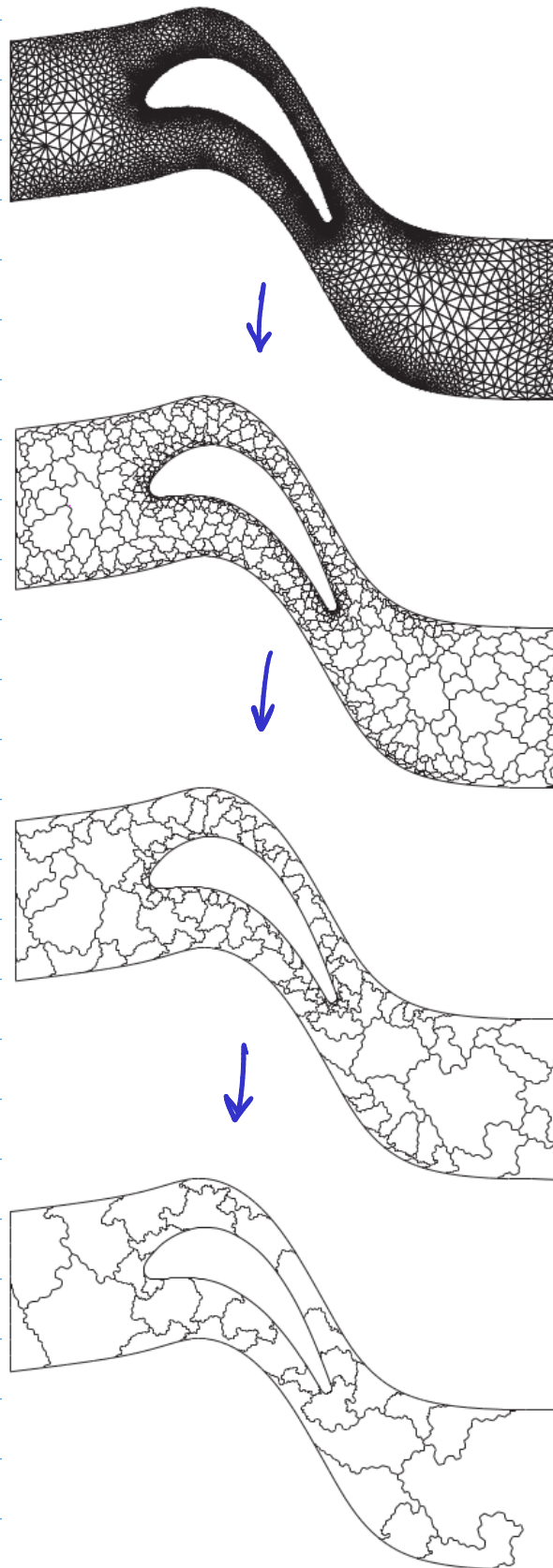


Figure 9.5 Types of multigrid cycles. • denotes time steps before restriction; ○ represents time steps after prolongation.



# MULTIGRID VE 2D NA NESTRUKT SITI



[Blazek - CFD  
Principles &  
Practice]

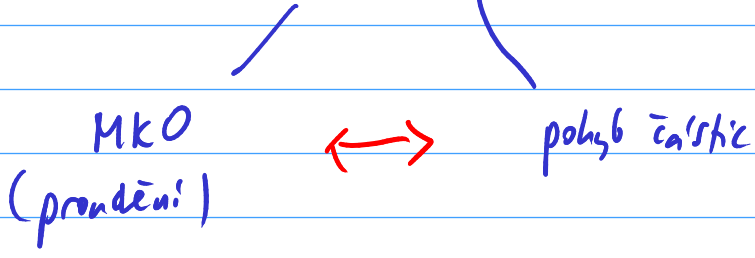
ZAJÍNAVOST - PÁLÍ METODY V CFD

• ALE - Arbitrary Lagrangian Eulerian - MKP + polyblind síť

• částečné / bezsíťové metody

↳ DEM --- Discrete Element Method  
(interakce mezi částicemi - kolize)

↳ MP-PIC (Multiphase Particle-in-Cell)



• Viscous Vortex Particle Method

↳ virtuální částice reprezentují vířvy v turbulentním proudění