

01MAN: Vzorový zápočtový test č. 1		Var. X	Datum: 31.10.2024			
Jméno a příjmení:	Kroužek	Příklad č.	1	2	3	Celkem
PAVEL STRACHOTA	10	Body	5	5	5	15

Pokyny:

- Obdržel(a) jste 1 list se zadáním a 2 prázdné listy s hlavičkou.
- Ihned po obdržení zadání **čitelně** napište vaše **jméno, příjmení a číslo kroužku** na **všechny** listy.
- Vypracujte řešení každého příkladu na **samostatném listu**. Příklad č. 1 vypracujte na **tento** list.
- Čas na vypracování testu je **45 minut**. **Nikdo neodchází předčasně**, aby nerušil ostatní.
- Po vypršení časového limitu **odevzdejte jednotlivé listy samostatně** dle pokynů vyučujícího.

Zadání:

- [1.] (5 bodů) Zapište pomocí kvantifikátorů následující výrok:
Pro všechna kladná ε existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro všechna přirozená čísla n větší než n_0 je n -tý člen posloupnosti (a_n) vzdálen od čísla c o méně než ε .
English version for convenience of foreign students: For every positive ε , there exists a natural number n_0 such that for every natural n greater than n_0 , the distance of the n -th term of the sequence (a_n) from the number c is smaller than ε .
 Poté zapište **negaci** tohoto výroku, a to jak pomocí kvantifikátorů, tak i slovně.

- [2.] (5 bodů) Pro reálnou funkci reálné proměnné

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

nalezněte její definiční obor D_f , obor hodnot H_f a množinu $f(\langle 3, 4 \rangle)$.

- [3.] (5 bodů) Zapište pomocí kvantifikátorů a **konkrétně** dvojici výroků, která je ekvivalentní se vztahem

$$\inf \left\{ \sqrt{n+5} - \sqrt{n+2} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = 0,$$

a poté tyto výroky dokažte.

Řešení 1. příkladu na tomto papíru (i na druhé straně)

nebo

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(|a_n - c| < \varepsilon)$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow |a_n - c| < \varepsilon)$$

negace:

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N}, n > n_0)(|a_n - c| \geq \varepsilon)$$

nebo

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})(n > n_0 \wedge |a_n - c| \geq \varepsilon)$$

mimochodem,
pozor na
toto

negace slovy: Existuje kladné ε takové, že nad každým přirozeným n_0 se najde nějaké n takové, že vzdálenost a_n od c je alespoň ε .

nezapomeňte vyplnit hlavičku!

01MAN: Zápočtový test č. 1		Var.	X	Datum: 31.10.2024
Jméno a příjmení:	Kroužek	Příklad č.		2
PAVEL STRACHOTA	10	Body		

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

- přirozený def. obor je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- obor hodnot H_f :

$$H_f = \{y \in \mathbb{R} \mid (\exists x \in D_f) (f(x) = y)\}$$

konkrétně:

$$H_f = \{y \in \mathbb{R} \mid (\exists x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}) \left(\frac{x+1}{x-1} = y \right)\}$$

tj. $y \in H_f \Leftrightarrow$ najdeme x tak, že $\frac{x+1}{x-1} = y$

$$x+1 = y(x-1)$$

$$y+1 = x(y-1)$$

$$\frac{y+1}{y-1} = x \Rightarrow \text{k lib. } y \neq 1 \text{ najdeme } x$$

$$\Rightarrow \underline{H_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}}$$

$$\begin{aligned} \bullet f(\langle 3, 4 \rangle) &= \{y \in \mathbb{R} \mid (\exists x \in \langle 3, 4 \rangle) \left(y = \frac{x+1}{x-1} \right)\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \mid (\exists x \in \langle 3, 4 \rangle) \left(x = \frac{y+1}{y-1} \right)\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \mid 3 \leq \frac{y+1}{y-1} \leq 4\} \end{aligned}$$

Pozn:
kdybychom už teď
uměli vyřešovat
průběh funkce, zjistili
bychom snadno $f(\langle 3, 4 \rangle) = \langle f(4), f(3) \rangle$

$$\text{tj. } y \in f(\langle 3, 4 \rangle) \Leftrightarrow 3 \leq \frac{y+1}{y-1} \leq 4$$

(pro $y > 1$)

$$\begin{aligned} 3y - 3 &\leq y + 1 \quad \wedge \quad y + 1 \leq 4y - 4 \\ 2y &\leq 4 & 5 &\leq 3y \\ y &\leq 2 & \frac{5}{3} &\leq y \\ y &\in \left\langle \frac{5}{3}, 2 \right\rangle \end{aligned}$$

pro $y < 1 \dots y \geq 2 \wedge y \leq \frac{5}{3}$
nemá řešení

$$\Rightarrow \underline{f(\langle 3, 4 \rangle) = \left\langle \frac{5}{3}, 2 \right\rangle}$$

nezapomeňte vyplnit hlavičku!

01MAN: Zápočtový test č. 1		Var.	X	Datum: 31.10.2024
Jméno a příjmení:	Kroužek	Příklad č.		3
PAVEL STRACHOTA	10	Body		

$$\alpha = \inf A \Leftrightarrow \begin{array}{l} 1. (\forall x \in A)(x \geq \alpha) \\ 2. (\forall \alpha' > \alpha)(\exists x \in A)(x < \alpha') \end{array}$$

ale konkrétně pro $A = \{ \sqrt{n+5} - \sqrt{n+2} \mid n \in \mathbb{N} \}$ to znamená

$$0 = \inf A \Leftrightarrow \begin{array}{l} 1. (\forall n \in \mathbb{N})(\sqrt{n+5} - \sqrt{n+2} \geq 0) \\ 2. (\forall \varepsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N})(\sqrt{n+5} - \sqrt{n+2} < \varepsilon) \end{array}$$

ověříme výrok ①

$$\begin{array}{l} \sqrt{n+5} - \sqrt{n+2} \geq 0 \\ \sqrt{n+5} \geq \sqrt{n+2} \quad |^2 \\ n+5 \geq n+2 \\ 5 \geq 2 \quad \checkmark \end{array}$$

ověříme výrok ②

$$\sqrt{n+5} - \sqrt{n+2} < \varepsilon \quad \dots \text{hledáme } n \text{ k danému } \varepsilon$$

vzorec

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$\frac{(n+5) - (n+2)}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n+2}} < \varepsilon$$

$$\frac{3}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n+2}} < \varepsilon$$

hrubý odhad:

$$\frac{3}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n+2}} < \frac{3}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \text{pokud } \frac{3}{\sqrt{n}} < \varepsilon, \text{ tj. } n > \left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^2, \text{ bude splněna i ②}$$

$$\text{konkrétní } n: \text{ např. } n = \left[\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^2 \right] + 1$$

↑ celá část