

Otázky k písemné části zkoušky z předmětu

01MAN Matematická analýza 1

Pravidla

- V každém písemném testu se objeví **právě tři otázky** z následujícího seznamu.
- Každá otázka bude obsahovat **nejvýše 4** z dílčích úloh a), b), c) atd., případně i méně (podle obtížnosti).
- Je-li v rámci jedné dílčí úlohy uvedeno více možností (ve smyslu A, resp. B, resp. C, ...), pak v konkrétním zadání budou zpravidla pouze některé z těchto možností.
- **Konkrétní příklady** množin, zobrazení, posloupností, funkcí atd. **se mohou lišit** od těch uvedených v tomto dokumentu, při zachování úrovně obtížnosti.
- Odpověď na každou otázku bude ohodnocena **maximálně 5 body**.
- Zkoušející může již během písemné zkoušky se studenty interagovat. O časovém limitu pro vypracování řešení rozhoduje zkoušející individuálně podle svého uvážení a podle reakcí studenta.
- Student postupuje k ústní části zkoušky, pokud z písemného testu získá **alespoň 8 bodů**.
- Jestliže student písemný test vypracoval bezchybně a získal plný počet bodů, složí zkoušku nejhůře se známkou E, bez ohledu na průběh ústní části.

1. Relace a zobrazení I. Necht' A, B jsou libovolné množiny

- Definujte pojmy relace $\mathcal{R}$ mezi množinami A, B a zobrazení f z množiny A do množiny B .
- Co je to definiční obor zobrazení f a obor hodnot zobrazení f ?
- Pomocí kvantifikátorů запиšte, že zobrazení f je injektivní (prosté).
- Pomocí kvantifikátorů запиšte, že zobrazení f je surjektivní (na množinu B).
- Necht' $M \subset A, N \subset B$. Definujte $f(M)$ a $f^{-1}(N)$.
- Za jakých podmínek existuje inverzní zobrazení f^{-1} a co je jeho definičním oborem?

2. Relace a zobrazení II. Necht' M, A, B jsou libovolné množiny

- Definujte pojem relace $\mathcal{R}$ na množině M .
- Pomocí kvantifikátorů napište, co to znamená, že $\mathcal{R}$ je ekvivalence na M .
- Pomocí kvantifikátorů napište, co to znamená, že $\mathcal{R}$ je uspořádání na M .
- Kdy říkáme, že množina A je ekvivalentní s množinou B ?
- Nalezněte příklad dvou ekvivalentních množin.

3. Spočetné a nespočetné množiny.

- Kdy řekneme, že množina A je spočetná?

- b) Které z následujících množin jsou spočetné? $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $C = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $D = (0, 1)$
 c) Necht' A je spočetná a B je konečná množina. Co lze říci o množinách $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$?

4. Množina reálných čísel, supremum a infimum. Necht' $A \subset \mathbb{R}$.

- a) Definujte dolní a horní zavoru množiny A .
 b) Kdy řekneme, že $x_0 \in \mathbb{R}$ je minimum, resp. maximum množiny A ?
 c) Definujte množinu opačnou $-A$
 d) Co to je A^* a A_* ?
 e) Jaké dva výroky charakterizují číslo $\beta = \sup A$, resp. $\alpha = \inf A$? Zapište je pomocí kvantifikátorů.
 f) Jaká vlastnost množiny reálných čísel zaručuje existenci $\sup A$ pro libovolnou $A \subset \mathbb{R}$?

5. Rozšířené množiny reálných a komplexních čísel $\bar{\mathbb{R}}$, $\bar{\mathbb{C}}$, okolí bodu.

- a) Necht' $x \in \mathbb{R}$. Jaké nerovnosti platí mezi x a $+\infty$, mezi x a $-\infty$?
 b) Definujte ε -okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ a $c \in \mathbb{C}$.
 c) Definujte okolí bodů $+\infty$ a $-\infty$ v $\mathbb{R}$, resp. ∞ v $\mathbb{C}$.
 d) Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. Rozhodněte, zda platí

$$(\forall \varepsilon_1 > 0) (\forall \varepsilon_2 > 0) (\exists x \in \mathbb{R}) (x \in H_a(\varepsilon_1) \wedge x \in H_b(\varepsilon_2)).$$

- e) Necht' $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Rozhodněte, zda platí

$$a + \varepsilon \in H_a(\varepsilon).$$

6. Číselné posloupnosti.

- a) Definujte pojem posloupnost reálných čísel pomocí pojmu zobrazení.
 b) Kdy řekneme, že číselná posloupnost (b_n) je vybraná z posloupnosti (a_n) ?
 c) Rozhodněte, zda je posloupnost $b_n = 2n^2 - 1$ vybraná z posloupnosti $a_n = 2n - 1$.
 d) Zapište pomocí kvantifikátorů, že posloupnost reálných čísel (a_n) je ostře rostoucí, resp. ostře klesající, resp. rostoucí, resp. klesající, resp. monotónní, resp. ryze monotónní, resp. omezená zdola, resp. omezená shora, resp. omezená.

7. Limita číselné posloupnosti I. Necht' (a_n) je posloupnost reálných čísel

- a) Zapište pomocí kvantifikátorů, co to znamená, že

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \in \mathbb{R}.$$

- b) Zapište pomocí kvantifikátorů, co to znamená, že

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty.$$

- c) Formulujte větu o limitě vybrané posloupnosti. Jak lze tuto větu použít k důkazu neexistence limity posloupnosti (a_n) ?
 d) Co to je posloupnost skorovybraná z posloupnosti (a_n) ?
 e) Formulujte větu o limitě skorovybrané posloupnosti.

f) Co lze říci o limitě monotónní posloupnosti? V jakém případě bude tato limita konečná?

g) Dokažte, že když $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = 0$, tak i $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

8. Limita číselné posloupnosti II. Necht' (a_n) , (b_n) jsou číselné posloupnosti, kde $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Čemu se rovná

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n), \text{ resp. } \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n), \text{ resp. } \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n b_n), \text{ resp. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right)$$

a za jakých předpokladů?

b) Nalezněte posloupnosti (a_n) , (b_n) tak, že vztahy z předchozího bodu nelze použít, a přesto lze příslušné limity vypočítat (jiným způsobem).

c) Necht' $(\forall n \in \mathbb{N}) (a_n > 0)$ a $k \in \mathbb{N}$. Čemu se rovná

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{a_n}?$$

9. Limita číselné posloupnosti III.

a) Vyslovte větu o limitě sevřené posloupnosti (sendvičovou větu).

b) Víme, že

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Necht' $a > 1$ je pevné číslo. Dokažte, že

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

10. Limita číselné posloupnosti IV.

a) Kdy řekneme, že posloupnost reálných čísel (a_n) je cauchyovská?

b) Vyslovte Bolzanovo-Cauchyovo kritérium konvergence číselné posloupnosti.

11. Eulerovo číslo e .

a) Definujte číslo e jako společnou limitu jistých dvou číselných posloupností. Jaké vlastnosti těchto posloupností jsou podstatné pro závěr, že mají limitu a že tato limita je konečná?

b) Znáte číslo e alespoň s přesností na 3 desetinná místa? Pokud ne, formulujte větu, která jej umožňuje efektivně a s dostatečnou přesností vypočítat.

c) Necht' (a_n) je kladná a (b_n) reálná číselná posloupnost. Necht' limity těchto posloupností jsou a , resp. b . Čemu se rovná

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{b_n}$$

a proč?

12. Limes superior a limes inferior reálné posloupnosti.

a) Definujte pojem *hromadná hodnota posloupnosti reálných čísel* (a_n) .

b) Jaký je nejmenší počet hromadných hodnot, které může reálná posloupnost mít?

c) Definujte pojem $\limsup a_n$, resp. $\liminf a_n$.

d) Vyslovte větu, která diskutuje případ, kdy $\limsup a_n = \liminf a_n$.

- e) Necht' platí $\limsup a_n = -\infty$. Co lze říci o limitě posloupnosti a_n ?
- f) Napište pomocí kvantifikátorů, že dvě posloupnosti vybrané z (a_n) „pokrývají“ celou původní posloupnost (a_n) . Jaký závěr lze učinit, pokud obě tyto posloupnosti mají stejnou limitu?

13. Stolova věta a Cauchyův vzorec. Necht' $(a_n), (b_n)$ jsou posloupnosti reálných čísel.

- a) Vyslovte Stolovu větu, která diskutuje výpočet limity

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

- b) Vyslovte znění věty, které říkáme Cauchyův vzorec, a která hovoří o limitě

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

14. Funkce reálné proměnné. Necht' $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- a) Zapište pomocí kvantifikátorů, co to znamená, že f je na svém definičním oboru omezená, resp. omezená shora, resp. omezená zdola, resp. rostoucí, resp. ostře rostoucí, resp. klesající, resp. ostře klesající, resp. monotónní, resp. ryze monotónní.
- b) Nalezněte funkci f , která na svém přirozeném definičním oboru (tj. pro všechna x , která lze dosadit do jejího předpisu) není prostá.
- c) Nalezněte množinu A tak, že $f|_A$ již prostá je.
- d) Necht' f je na A ostře rostoucí. Co lze říci o existenci a monotonii inverzní funkce f^{-1} ?

15. Limita funkce reálné proměnné I a spojitost v bodě. Necht' $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- a) Definujte hromadný bod množiny D_f .
- b) Zapište pomocí kvantifikátorů, že

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \in \mathbb{R}.$$

V jaké množině musí ležet bod a ? Připouští definice limity i $a = +\infty$?

- c) Zapište definici limity funkce f v bodě a zprava, resp. zleva.
- d) Zapište pomocí kvantifikátorů, že funkce f je spojitá v bodě a . Jaká věta dává do souvislosti limitu a spojitost funkce v bodě a ?

16. Limita funkce reálné proměnné II.

- a) Vyslovte Heineovu větu.
- b) Zapište libovolné z tvrzení o výpočtu limit funkcí, v jehož důkazu se s výhodou používá Heineova věta.
- c) Ukažte, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

- d) S pomocí Heineovy věty ukažte, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x$$

neexistuje.

17. Limita funkce reálné proměnné III.

- a) Vyslovte větu o limitě složené funkce.

b) Z platnosti

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

a s pomocí věty o limitě složené funkce dokažte, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \text{ resp. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

18. Spojitost funkce v bodě a na intervalu.

- a) Za jakých předpokladů je funkce f spojitá v izolovaném bodě svého definičního oboru?
- b) Definujte, co to znamená, že f je spojitá na intervalu $\mathcal{I}$.
- c) Nechť f je spojitá na intervalu $(0, 2)$ a g je spojitá na intervalu $\langle 1, 3 \rangle$. Co lze říct o spojitosti funkce $f + g$?
- d) Co to znamená, že funkce f má v bodě a odstranitelnou nespojitost?
- e) Co to znamená, že funkce f má v bodě a skok?
- f) Vyslovte postačující podmínku pro existenci řešení rovnice $f(x) = 0$ na intervalu (a, b) .

19. Derivace funkce I.

- a) Definujte derivaci funkce f v bodě a . V jaké množině musí ležet bod a , aby definice dávala smysl?
- b) Jaký je rozdíl mezi výroky „ f je diferencovatelná v bodě a “ a „ f má derivaci v bodě a “?
- c) Dokažte, že je-li f diferencovatelná v bodě a , tak f je též spojitá v bodě a .
- d) Podle definice vypočítejte $f'(a)$ pro $f(x) = \ln x$ a $a > 0$.

20. Derivace funkce II.

- a) Vyslovte větu o derivaci součinu funkcí f, g v bodě a .
- b) Vyslovte větu o derivaci složené funkce.
- c) S pomocí věty o derivaci složené funkce dokažte, že

$$f(x) = x^\alpha \implies f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

pro každé $x > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$.

21. Derivace funkce III.

- a) Vyslovte větu o derivaci inverzní funkce.
- b) Ze znalosti derivace funkce $f(x) = \sin x$ a z věty o derivaci inverzní funkce odvoďte vztah pro derivaci funkce $f^{-1}(x) = \arcsin x$ pro $x \in (-1, 1)$.

22. Derivace funkce IV. (jednostranné derivace)

- a) Definujte $f'_+(a)$, tj. derivaci funkce f v bodě a zprava (resp. zleva).
- b) Vyslovte Darbouxovu větu o jednostranné derivaci.
- c) Pomocí Darbouxovy věty ukažte, že pro $f(x) = \arcsin x$ je $f'_+(-1) = +\infty$.

23. Vyšetřování průběhu funkce I.

- a) Zapište pomocí kvantifikátorů, že funkce f má v bodě a lokální minimum, resp. ostré lokální minimum, resp. lokální maximum, resp. ostré lokální maximum.

- b) Vysvětlíte, co se myslí tím, že má f v bodě a lokální extrém.
- c) Vyslovte větu, která dává do souvislosti výskyt lokálního extrému f v bodě a a derivaci funkce f .
- d) Vyslovte větu, která dává do souvislosti monotonii funkce f a derivaci funkce f na intervalu $\mathcal{J}$.

24. Vyšetřování průběhu funkce II. Necht' $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a necht' $\mathcal{J} \subset D_f$ je interval.

- a) Zapište pomocí kvantifikátorů, že funkce f je konvexní, resp. ostře konvexní, resp, konkávní, resp. ostře konkávní na intervalu $\mathcal{J}$.
- b) Vyslovte větu, která dává do souvislosti konvexnost (resp. konkávnost) funkce f a její první derivaci f' .
- c) Vyslovte větu, která dává do souvislosti konvexnost (resp. konkávnost) funkce f a její druhou derivaci f'' .

25. Vyšetřování průběhu funkce III.

- a) Co to znamená, že f má v bodě a asymptotu danou rovnicí $x = a$?
- b) Co to znamená, že f má v $+\infty$ (resp. $-\infty$) asymptotu danou rovnicí $y = kx + q$?
- c) Jak poznáme, že asymptota $y = kx + q$ existuje? Jak se určí k a q ?

Poslední úprava: 6. února 2025

Otázky a podněty zasílejte na: pavel.strachota@fjfi.cvut.cz