

01MIP Míra a pravděpodobnost

Martin Kovanda
dle přednášky Ing. Václava Kůse Ph.D.

25. srpna 2020

Obsah

1	Axiomy pravděpodobnostního prostoru	1
2	Vsuvka do teorie míry	5
3	Spojité rozdělení	9
3.1	Neintegrální charakteristiky	13
3.2	Integrální charakteristiky	13
3.3	Charakteristické funkce náhodných veličin	19
4	Konvergence na prostoru náhodných veličin	21
5	Limitní věty - Zákony velkých čísel (Laws of Large Numbers)	23

Předmluva

Materiál byl sestaven z přednášek Ing. Václava Kůse Ph.D., které proběhly v zimním semestru akademického roku 2019/2020 na Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze.

Tento učební text je určen posluchačům 3. ročníku základního studia navštěvujícím kurs 01MIP *Míra a pravděpodobnost*, který je zařazen mezi předměty oborů AMSM a MM. Při sestavování textu se předpokládaly znalosti základů matematiky na úrovni absolvování kurzů 01MAB2-4 a LAB1-2.

Doporučená literatura:

(1)

1 Axiomy pravděpodobnostního prostoru

Věta 1.1. *Definujeme základní operace:*

1. A^c je komplementární jev (opačný \bar{A}), $\omega \in A^c \Leftrightarrow \omega \notin A$
2. $A \subset B$, ($\omega \in A \Rightarrow \omega \in B$)
3. $A = B$, ($A \subset B$) \wedge ($B \subset A$)
4. $A \cap B$, jev, kdy A a B nastane současně
5. $A \cap B = \emptyset$, říkáme, že A, B jsou neslučitelné (disjunktní)
6. $A - B = A \cap B^c$
7. $A \cup B$ označuje jev, kdy nastává A nebo B ($\omega \in A \cup B$, pokud $\omega \in A \vee \omega \in B$)
pro neslučitelné A, B značíme $A + B$, pro disjunktní A_j dále $\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j = \sum_{j=1}^{+\infty} A_j$
8. $A \triangle B = (A - B) + (B - A)$
9. $A \cap A^c = \emptyset$, $A \cup A^c = \Omega$, $A \cap \Omega = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$

Platí tedy komutativita, distribuce, asociace apod.

Definice 1.2. Buď Ω základní množina. Nechť dále $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ splňuje následující axiomy:

- 1) $\Omega \in \mathcal{A}$
- 2) $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
- 3) $(A_j)_{j=1}^{+\infty} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathcal{A}$

Potom \mathcal{A} nazveme σ -algebrou (jevů). Pokud platí

$$3^*) (A_j)_{j=1}^n \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{A},$$

pak \mathcal{A} nazveme algebra.

Věta 1.3. *Nechť \mathcal{A} je σ -algebra a Ω základní množina. Potom platí, že*

- 1) $\emptyset \in \mathcal{A}$,
- 2) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A - B \in \mathcal{A}$,
- 3) $\bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{A} \quad \forall A_j \in \mathcal{A}$,

1 Axiomy pravděpodobnostního prostoru

$$4) (A_j)_{j=1}^{+\infty} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathcal{A},$$

$$5) \bigcap_{j=1}^n A_j \in \mathcal{A} \quad \forall A_j \in \mathcal{A}.$$

Definice 1.4. Mějme Ω, \mathcal{A} jako σ -algebru. Potom libovolnou funkci $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující axiomy

$$K1) P(\Omega) = 1$$

$$K2) (\forall A \in \mathcal{A})(P(A) \geq 0)$$

$$K3) (\sigma\text{-aditivita}): P\left(\sum_{j=1}^{+\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(A_j) \quad \forall (A_j)_{j=1}^{+\infty} \subset \mathcal{A} \text{ disjunktní}$$

nazveme **pravděpodobnostní mírou** (pravděpodobností) na (Ω, \mathcal{A}) . Pokud není splněna pouze podmínka K1), potom ji nazveme **mírou obecnou** a značíme μ .

Věta 1.5. Mějme (Ω, \mathcal{A}, P) . Potom pro pravděpodobnostní míru platí

$$1. P(\emptyset) = 0$$

$$2. P\left(\sum_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n P(A_j) \text{ pro } A_j \text{ disjunktní (aditivita } P)$$

$$3. A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B) \text{ (monotonie } P)$$

$$4. A \subset B \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A)$$

$$5. (\forall A \in \mathcal{A})(P(A) \leq 1) \text{ (omezená, normovaná na 1)}$$

$$6. (\forall A \in \mathcal{A})(P(A^c) = 1 - P(A)) \text{ (komplementarita)}$$

Věta 1.6. Mějme (Ω, \mathcal{A}, P) . Pak platí, že

$$1. P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \forall A, B \in \mathcal{A}$$

2. Booleova nerovnost:

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n, +\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n, +\infty} P(A_j) \quad \forall (A_j)_{j=1}^{n, +\infty} \subset \mathcal{A}$$

Věta 1.7. Mějme (Ω, \mathcal{A}, P) . Potom pokud

$$a) A_n \searrow A \left(\text{tzn. } A_n \supset A_{n+1}, A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \right), \text{ pak } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = P(A) \text{ (} P \text{ je spojitá shora)}$$

$$b) A_n \nearrow A \left(\text{tzn. } A_n \subset A_{n+1}, A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right), \text{ pak } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = P(A) \text{ (} P \text{ je spojitá zdola)}$$

1 Axiomy pravděpodobnostního prostoru

Definice 1.8. Necht' $A, B \in \mathcal{A}$, $P(B) > 0$. Potom definujeme

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

jako **podmíněnou pravděpodobnost** jevu A za předpokladu jevu B .

Věta 1.9 (Součinové pravidlo). Necht' $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ a zároveň $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$. Potom

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2, A_1) \dots P(A_n|A_1, \dots, A_{n-1})$$

Věta 1.10 (O úplném rozkladu). Necht' $(H_k)_{k=1}^{n,+\infty}$ tvoří tzv. úplný rozklad Ω , tzn. H_k jsou navzájem neslučitelné, dále $P(H_k) > 0$, $P\left(\sum_{j=1}^{n,+\infty} H_k\right) = 1$ (nemusí zahrnovat množiny s nulovou pravděpodobností), $A \in \mathcal{A}$. Potom

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n,+\infty} P(A|H_k)P(H_k)$$

Věta 1.11 (Bayesova, 1763). Mějme $(H_k)_{k=1}^{n,+\infty}$ jako úplný rozklad Ω , $A \in \mathcal{A}$, $P(A) > 0$. Potom $\forall k \in \mathbb{N}$ platí, že

$$P(H_k|A) = \frac{P(A|H_k)P(H_k)}{\sum_{j=1}^{n,+\infty} P(A|H_j)P(H_j)}$$

Definice 1.12. Necht' \mathcal{C} je systém jevů z \mathcal{A} (\mathcal{A} -měřitelné množiny). Pak říkáme, že jevy v \mathcal{C} jsou (vzájemně) **nezávislé**, pokud $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall (A_j)_{j=1}^k \subset \mathcal{C}$ platí, že

$$P\left(\bigcap_{j=1}^k A_j\right) = \prod_{j=1}^k P(A_j).$$

Věta 1.13. Pokud A, B jsou neslučitelné jevy, pak A, B jsou nezávislé $\Leftrightarrow P(A)P(B) = 0$.

Věta 1.14. Mějme $A, B \in \mathcal{A}$ tak, že $P(B) = 0$ nebo $P(B) = 1$. Potom A, B jsou nezávislé jevy.

Věta 1.15. $A, B \in \mathcal{A}$ jsou nezávislé právě tehdy, když A, B^c jsou nezávislé.

Důsledek 1.16. V \mathcal{C} lze zaměnit jevy za komplementární jevy a nezávislost zůstane v platnosti.

Věta 1.17. Pokud A, B jsou nezávislé a $P(B) > 0$, tak $P(A|B) = P(A)$.

Věta 1.18. Mějme $A, B \in \mathcal{A}$, $P(B) > 0$, $P(A|B) = P(A)$. Pak A, B jsou nezávislé.

Definice 1.19. Mějme \mathcal{C}_1 a \mathcal{C}_2 jako soubory jevů. Říkáme, že $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ jsou nezávislé, pokud $\forall A \in \mathcal{C}_1$, $\forall B \in \mathcal{C}_2$ jsou A, B nezávislé. $(C_j)_{j=1}^{n,+\infty}$ jsou nezávislé, pokud $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall i \in \hat{k}$, $\forall A_{j_i} \in \mathcal{C}_{j_i}$ platí, že A_{j_1}, \dots, A_{j_k} jsou nezávislé.

Definice 1.20. Mějme (Ω, \mathcal{A}, P) , $(A_n)_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{A}$. Definujeme

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k = \{A_n \text{ i.o. (infinitely often)}\}$$

1 Axiomy pravděpodobnostního prostoru

Věta 1.21 (Borel-Cantelliho lemma). *Bud' $(A_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{A}$.*

a) *Pokud $\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) < +\infty$, pak $P(\{A_n \text{ i.o.}\}) = 0$.*

b) *Pokud $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ jsou stochasticky nezávislé, pak*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = +\infty \Rightarrow P(\{A_n \text{ i.o.}\}) = 1.$$

2 Vsuvka do teorie míry

Definice 2.1. Necht' $\tau \neq \emptyset$ je libovolný systém z 2^Ω . Definujeme $\sigma(\tau) = \bigcap_{\alpha} \mathcal{A}_\alpha$, kde \mathcal{A}_α jsou σ -algebry takové, že $\tau \subset \mathcal{A}_\alpha$. Množinu $\sigma(\tau)$ nazýváme **minimální σ -algebrou** nad systémem τ .

Definice 2.2. Mějme $\Omega = \mathbb{R}^n$ a definujme $\tau := \{ \times_{i=1}^n (a_i, b_i) : a_i, b_i \in \mathbb{R} \}$. Potom $\sigma(\tau) \stackrel{\text{ozn}}{=} \mathcal{B}_n$, kde \mathcal{B}_n nazveme **borelovská σ -algebra** v \mathbb{R}^n . Na prostoru (Ω, τ) , kde τ je topologie, pak definujeme $\sigma(\tau) = \mathcal{B}$.

Definice 2.3. Funkce $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ se nazývá **\mathcal{A} -měřitelná**, pokud $(\forall B \in \mathcal{B}_n)(g^{-1}(B) \in \mathcal{A})$. Pokud \mathcal{A} je borelovská σ -algebra, potom g nazýváme **borelovsky měřitelnou** funkcí.

Definice 2.4. Mějme funkci $\mathbb{X} : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$. Potom \mathbb{X} se nazývá **náhodnou veličinou** (\mathcal{A} -měřitelnou funkcí) na (Ω, \mathcal{A}) , pokud $(\forall B \in \mathcal{B}_n)(\mathbb{X}^{-1}(B) \in \mathcal{A})$. Pokud \mathcal{A} je borelovská σ -algebra, pak \mathbb{X} jako náhodná veličina (*n.v.*) je **borelovsky měřitelnou** funkcí.

Věta 2.5. Necht' $\emptyset \neq \tau \subset 2^\Omega$ a τ generuje \mathcal{B} , tedy $\sigma(\tau) = \mathcal{B}$. Potom

$$\mathbb{X} \text{ je n.v.} \Leftrightarrow (\forall B \in \tau)(\mathbb{X}^{-1}(B) \in \mathcal{A}).$$

Definice 2.6. Necht' $\mathbb{X} : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$. Označíme dále $\mathbb{X}^{-1}(\mathcal{B}_n) = \{\mathbb{X}^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}_n\}$ a nazveme ji **σ -algebra generovaná náhodnou veličinou \mathbb{X}** , tedy

\mathbb{X} je n.v. $\Leftrightarrow \mathbb{X}^{-1}(\mathcal{B}_n) \subset \mathcal{A} \stackrel{2.5}{\Leftrightarrow} \mathbb{X}^{-1}(\tau) \subset \mathcal{A}$ pro libovolné $\tau \neq \emptyset$, které generuje \mathcal{B}_n .

Věta 2.7. V \mathbb{R}^1 definujeme následující systémy:

$$1) \tau_1 = \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}$$

$$2) \tau_2 = \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\}$$

$$3) \tau_3 = \{[b, +\infty) : b \in \mathbb{R}\}$$

$$4) \tau_4 = \{(b, +\infty) : b \in \mathbb{R}\}$$

$$5) \tau_5 = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$6) \tau_6 = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ otevřená}\}.$$

Pak $(\forall j \in \hat{6})(\sigma(\tau_j) = \mathcal{B})$.

Důsledek 2.8. X je n.v. na $(\Omega, \mathcal{A}) \Leftrightarrow (\forall b \in \mathbb{R})(X^{-1}((-\infty, b]) = \{\omega : X(\omega) \leq b\} \in \mathcal{A}) \Leftrightarrow (\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b)(\{\omega : a \leq X(\omega) \leq b\} \in \mathcal{A})$

2 Vsuvka do teorie míry

Definice 2.9. Mějme (Ω, \mathcal{A}) , $A \subset 2^\Omega$. Definujeme funkci

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}, \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

jako **indikátor A**.

Věta 2.10. I_A je náhodná veličina $\Leftrightarrow A \in \mathcal{A}$ (jev A).

Věta 2.11. Nechť $\mathbb{X} : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$ je náhodná veličina a $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je borelovsky měřitelná funkce. Pak $g(\mathbb{X}) = g \circ \mathbb{X}$ je náhodná veličina na (Ω, \mathcal{A}) .

Důsledek 2.12. Nechť X, Y jsou náhodné veličiny na (Ω, \mathcal{A}) . Pak libovolná spojitá funkce $g(X, Y)$ je náhodná veličina.

Věta 2.13. Mějme náhodné veličiny $(X_n)_{n \geq 1}$ na (Ω, \mathcal{A}) . Pak

1. $\sup_{n \geq 1} X_n, \inf_{n \geq 1} X_n,$
2. $\limsup_{n \rightarrow +\infty} X_n, \liminf_{n \rightarrow +\infty} X_n,$
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n \stackrel{\text{ozn}}{=} X$ (pokud limita existuje),

jsou náhodné veličiny.

Definice 2.14. Nechť \mathbb{X} je náhodná veličina na $(\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$. Definujeme **rozdělení náhodné veličiny** \mathbb{X} , označíme $P^{\mathbb{X}} = P \circ \mathbb{X}^{-1} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$. Platí, že

$$P^{\mathbb{X}}(B) = P \circ \mathbb{X}^{-1}(B) = P(\{\omega : \mathbb{X}(\omega) \in B\}) \stackrel{\text{ozn}}{=} P(\mathbb{X} \in B).$$

Definice 2.15. Mějme náhodné veličiny $(X_j)_{j=1}^{+\infty}$ na (Ω, \mathcal{A}, P) zobrazující do $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Říkáme, že $(X_j)_{j=1}^{+\infty}$ jsou **(stochasticky) nezávislé**, pokud $\left(X_j^{-1}(\mathcal{B})\right)_{j \geq 1}$ jsou nezávislé, tzn. $\forall B_j \in \mathcal{B}$ platí, že $\left(X_j^{-1}(B_j)\right)_{j \geq 1}$ jsou nezávislé.

Věta 2.16. Nechť X, Y jsou náhodné veličiny na (Ω, \mathcal{A}, P) . Pak X, Y jsou nezávislé $\Leftrightarrow \forall f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ borelovsky měřitelné jsou $f(X)$ a $g(Y)$ nezávislé náhodné veličiny.

Důsledek 2.17. Nechť $(X_j)_{j=1}^{+\infty}$ jsou nezávislé náhodné veličiny na (Ω, \mathcal{A}, P) a $(g_j)_{j=1}^{+\infty}$ je borelovsky měřitelná transformace. Pak $\underbrace{(g_j(X_j))_{j=1}^{+\infty}}_{Y_j}$ jsou nezávislé.

Důsledek 2.18. Pokud navíc $(\forall j \geq 1)(g_j = g)$ a nechť $X_j \sim P^X$ a $\underbrace{(X_j)_{j=1}^{+\infty}}_{i.d.}$ jsou nezávislé.
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{i.i.d.}$

Pak $(g(X_j))_{j \geq 1}^{+\infty}$ jsou nezávislé.

2 Vsuvka do teorie míry

Definice 2.19. Necht' $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)$ je náhodná veličina na (Ω, \mathcal{A}, P) s rozdělením $P^{\mathbb{X}} = P \circ \mathbb{X}^{-1}$. Pak definujeme **distribuční funkci** náhodné veličiny \mathbb{X}

$$F_{\mathbb{X}} := P^{\mathbb{X}} / \tau_{1,n}, \text{ kde } \tau_{1,n} = \left\{ \bigtimes_{i=1}^n (-\infty, x_i] : x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

s funkčními hodnotami

$$F_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) = P^{\mathbb{X}} \left(\bigtimes_{i=1}^n (-\infty, x_i] \right) = P(\mathbb{X} \leq \mathbf{x}) \stackrel{\text{ozn}}{=} P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n)$$

Pro \mathbb{R}^1 tedy $F_X(x) = P^X((-\infty, x]) = P \circ X^{-1}((-\infty, x]) = P(\{\omega : X(\omega) \leq x\}) \stackrel{\text{ozn}}{=} P(X \leq x)$ a nazýváme ji **kumulativní distribuční funkcí** (CDF).

Věta 2.20 (Monotonne class theorem, MCT). Máme $\Omega \in \tau$, $\tau \subset 2^\Omega$ tak, že τ je uzavřený na konečné průniky. Pak $\sigma(\tau) = \mathcal{C}$, kde \mathcal{C} je nejmenší σ -algebra, která splňuje

1. $\tau \subset \mathcal{C}$
2. \mathcal{C} je uzavřený na rozdíly, tzn. $(A, B \in \mathcal{C}, A \subset B) \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{C}$
3. \mathcal{C} je uzavřený na limitu zdola, tzn. $\left((A_j)_{j=1}^{+\infty} \in \mathcal{C}, A_j \subset A_{j+1}, A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \right) \Rightarrow A \in \mathcal{C}$

Věta 2.21. Mějme (Ω, \mathcal{A}) , $\tau \subset \mathcal{A}$ tak, že je uzavřený na průniky a generuje \mathcal{A} , tedy $\sigma(\tau) = \mathcal{A}$. Necht' P, Q jsou dvě pravděpodobnostní míry na (Ω, \mathcal{A}) . Pokud $P = Q$ na τ , pak $P = Q$ na \mathcal{A} .

Věta 2.22. Máme náhodnou veličinu $\mathbb{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ na (Ω, \mathcal{A}, P) s rozdělením $P^{\mathbb{X}}$. Pak $F_{\mathbb{X}}$ jednoznačně charakterizuje $P^{\mathbb{X}}$. (Značíme jako $\mathbb{X} \sim P^{\mathbb{X}}$, případně $\mathbb{X} \sim F_{\mathbb{X}}$)

Důsledek 2.23. Necht' P je pravděpodobnostní míra na $\tau \subset 2^\Omega$ a τ je algebra. Pak \exists_1 rozšíření P z τ na $\sigma(\tau)$.

Věta 2.24. Bud' $\mathbb{X} \sim P^{\mathbb{X}}$ ($\mathbb{X} \sim F_{\mathbb{X}}$). Pak

D1) $F_{\mathbb{X}}$ je monotonní v každé své proměnné. ($\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$)

D2) $F_{\mathbb{X}}$ je zprava spojitá v každé své proměnné.

D3) a) $\lim_{x_j \rightarrow +\infty} F_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) = F_{\mathbb{X}-X_j}(\mathbf{x} - x_j)$, kde

$$\mathbf{x} - x_j := (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \quad \forall j \in \hat{n}, \quad \forall \mathbf{x} - x_j \in \mathbb{R}^{n-1}$$

b) $\lim_{x_j \rightarrow -\infty} F_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) = 0$ (limita přes libovolnou složku x_j , $\forall j \in \hat{n}$)

c) $\lim_{\substack{x_j \rightarrow +\infty \\ \forall j \in \hat{n}}} F_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) = 1$ (limita přes všechny složky najednou)

Důsledek 2.25. $(X_j)_{j=1}^{+\infty}$ jsou nezávislé, pokud $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall (B_{j_i})_{i=1}^k \in \mathcal{B}$ platí, že

$$P(X_{j_1} \in B_{j_1}, \dots, X_{j_k} \in B_{j_k}) = \prod_{i=1}^k P(X_{j_i} \in B_{j_i}) = \prod_{i=1}^k P^{X_{j_i}}(B_{j_i}) = P^{\mathbb{X}} \left(\bigtimes_{i=1}^k B_{j_i} \right)$$

2 Vsuvka do teorie míry

Definice 2.26. Mějme $F_{\mathbb{X}}(\mathbf{x})$. Pak pro $\forall j_0 \in \hat{n}$ definujeme **marginální distribuční funkci** složky X_{j_0} vztahem $F_{X_{j_0}}(x_{j_0}) = \lim_{\substack{x_j \rightarrow +\infty \\ \forall j \neq j_0}} F_{\mathbb{X}}(\mathbf{x})$.

Věta 2.27. V definici nezávislé náhodné veličiny lze zaměnit \mathcal{B} za libovolný systém $\tau \subset 2^{\Omega}$, který je uzavřený na konečné průniky a $\sigma(\tau) = \mathcal{B}$.

Důsledek 2.28.

Náhodné veličiny $(X_j)_{j=1}^{+\infty}$ jsou nezávislé $\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n) \left(F_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^n F_{X_j}(x_j) \right)$.

Věta 2.29. Mějme $F: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ splňující vlastnosti D1) až D3). Pak F je distribuční funkcí nějaké jednoznačně zadané náhodné veličiny X_P s rozdělením P^X (tedy $F_X = F$).

Důsledek 2.30. Teorie míry: Pokud F splňuje D1 (monotonnost) a D2 (spojitost zprava), pak $\exists \mu_F$ generovaná funkcí F tak, že $\mu((a, b]) = F(b) - F(a)$, $\forall a < b$. Takto můžeme vytvořit Lebesgue-Stieltjesovu míru μ_F . Pokud $\mu((a, b]) = b - a$, $\forall a < b$, potom tuto míru nazveme Lebesgueovou mírou (lineární).

Věta 2.31. Mějme $X \sim P^X (F_X)$. Pak F_X má nejvýše spočetně mnoho skoků.

Definice 2.32. Nechť X je náhodná veličina s rozdělením P^X . X se nazývá **diskrétní náhodná veličina**, pokud je $\text{Ran}(X) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ nejvýše spočetná a předpokládáme, že $X^{-1}(\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}) = \Omega$. Značíme $(\forall k \in \hat{n}, +\infty) (p_k = P(X = x_k))$. Definujeme

$$f_X(x) = \begin{cases} p_k & x = x_k \\ 0 & x \neq x_k \end{cases} \quad \forall k \in \hat{n}, \widehat{+\infty}$$

jako **diskrétní hustotu pravděpodobnosti** náhodné veličiny X (frekvenční funkci).

Definice 2.33. $\mathbb{X} = (X, Y)$ náhodná veličina s DR. Pak definujeme **podmíněnou hustotu pravděpodobnosti** X za podmínky $Y=y$ předpisem

$$f_{X|Y}(x|y) = f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{(X,Y)}(x, y)}{f_Y(y)},$$

pokud $y \in \text{Ran}(Y)$ a $f_Y(y) > 0$.

3 Spojitá rozdělení

Definice 3.1. Míra λ je σ -**finitní** (σ -konečná), pokud $\exists (B_j)_{j=1}^{+\infty} \in \mathcal{B}_n$ tak, že $\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} B_j = \mathbb{R}^n\right)$ a $(\forall j \in \mathbb{N})(\lambda(B_j) < +\infty)$.

Definice 3.2. Pro míry ν, λ definujeme

$$\nu \ll \lambda \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall B \in \mathcal{B}_n)(\lambda(B) < \delta \Rightarrow \nu(B) < \varepsilon),$$

tedy pro ν konečnou je $\nu \ll \lambda$ ekvivalentní s $(\forall B \in \mathcal{B})(\lambda(B) = 0 \Rightarrow \nu(B) = 0)$ a říkáme, že λ **dominuje** ν .

Věta 3.3 (o absolutně spojitém integrálu). *Mějme borelovskou funkci $f \geq 0$, $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \lambda)$ a definujeme*

$$\nu(B) := \int_B f d\lambda, \text{ kde } \lambda \text{ je } \sigma\text{-konečná.}$$

Pak $\nu \ll \lambda$, tedy platí, že $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall B \in \mathcal{B}_n)(\lambda(B) < \delta \Rightarrow \int_B f d\lambda < \varepsilon)$.

Důsledek 3.4 (spojení). *Nechť λ je σ -finitní. Potom $\nu \ll \lambda \Rightarrow \exists_1 f \geq 0$ borelovská tak, že*

$$(\forall B \in \mathcal{B}_n)(\nu(B) = \int_B f d\lambda).$$

Lemma 3.5 (Lebesgueova dekompozice konečné míry). *Mějme konečné míry ν, λ . Potom $\exists f \geq 0$ borelovská a $\exists C \in \mathcal{B}_n$ tak, že $\lambda(C) = 0$ a $\nu(B) = \int_B f d\lambda + \nu(B \cap C)$.*

Věta 3.6 (Radon-Nikodym). *Nechť ν a λ jsou dvě míry na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$, λ je σ -finitní a ν je absolutně spojitá vzhledem k míře λ ($\nu \ll \lambda$).*

Potom $\exists f \geq 0$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, borelovsky měřitelná funkce tak, že $(\forall B \in \mathcal{B}_n)(\nu(B) = \int_B f d\lambda)$. Navíc f je jednoznačná skoro všude v λ a nazývá se Radon-Nikodymova derivace míry ν vzhledem k λ , ozn. $f = \frac{d\nu}{d\lambda}$.

Definice 3.7. Řekneme, že náhodná veličina $\mathbb{X} \sim P^{\mathbb{X}}$ má ASR_λ (**absolutně spojitě rozdělení** vzhledem k λ), pokud $P^{\mathbb{X}} \ll \lambda$, kde λ je σ -konečná, a pokud existuje právě jedna $f_{\mathbb{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ taková, že $P(\mathbb{X} \in B) = P^{\mathbb{X}}(B) = \int_B f_{\mathbb{X}} d\lambda \quad \forall B \in \mathcal{B}_n$. Funkci $f_{\mathbb{X}}$ nazýváme **hustotou pravděpodobnosti** (pdf/PDF) náhodné veličiny \mathbb{X} .

Věta 3.8. *Nechť $\mathbb{X} \sim P^{\mathbb{X}}$ a λ je σ -konečná. Pak*

$$P^{\mathbb{X}} \ll \lambda \text{ (}\mathbb{X} \text{ má } ASR_\lambda) \Leftrightarrow (\exists_1 f_{\mathbb{X}} \geq 0 \text{ borelovská})(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n) \left(F_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\mathbb{X}}(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \right).$$

3 Spojitá rozdělení

Věta 3.9. Mějme $\mathbb{X} \sim P^{\mathbb{X}}$ s ASR_{λ} (λ - Lebesgue) (zapisujeme $\mathbb{X} \sim f_{\mathbb{X}}$), ozn. $\mathbb{X}' = (X_1, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_n)$. Pak \mathbb{X}' má ASR a platí, že

$$f_{\mathbb{X}'}(\mathbf{x}') = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) dx_j \quad \forall \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{n-1}$$

Věta 3.10. Mějme $\mathbb{X} \sim P^{\mathbb{X}}$ s $ASR(f_{\mathbb{X}})$. Pak

$$X_1, \dots, X_n \text{ jsou stochasticky nezávislé} \Leftrightarrow f_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^n f_{X_j}(x_j) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Definice 3.11. Nechť (X, Y) je náhodná veličina s $ASR(f_{(X,Y)})$. Definujeme podmíněnou hustotu náhodné veličiny X za předpokladu $Y = y$ pro pevné $y \in \text{Ran}(Y)$ tak, že $f_Y(y) \neq 0$, vztahem

$$f_{X|Y}(x|y) := \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

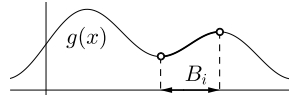
Věta 3.12. Mějme náhodnou veličinu $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n) \sim f_{\mathbb{X}}$ (ASR) a nechť $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je borelovsky měřitelná funkce. Definujeme dále $\mathbb{Y} = g(\mathbb{X})$. Pak

$$f_{\mathbb{Y}}(\mathbf{y}) = \frac{\partial^m}{\partial y_1 \dots \partial y_m} \int_{B_{\mathbf{y}}} f_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad B_{\mathbf{y}} := \{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) \leq \mathbf{y}\} \in \mathcal{B}.$$

Věta 3.13. Mějme $\mathbb{X} \sim f_{\mathbb{X}}$ (ASR) a $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ borelovskou tak, že g je na (částech) B_i regulární a prostá $\forall i \in \hat{k}$. Nechť $B_i \subset \mathbb{R}^n$ jsou otevřené a disjunktní a $G := \sum_{i=1}^k B_i$ je takové, že $\int_G f_{\mathbb{X}} d\mathbf{x} = 1$, tedy $P^{\mathbb{X}}(G) = 1$. Pak $\mathbb{Y} = g(\mathbb{X})$ má ASR a platí pro něj, že

$$f_{\mathbb{Y}}(\mathbf{y}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^k f_{\mathbb{X}}(g_i^{-1}(\mathbf{y})) |\mathbb{J}_{g_i^{-1}}(\mathbf{y})| & \mathbf{y} \in g(G), \\ 0 & \text{jinde,} \end{cases}$$

kde g_i^{-1} jsou funkce inverzní k g na B_i pro $\forall i \in \hat{k}$.



Důsledek 3.14.

a) Mějme speciální případ $n = 1$, $X \sim f_{\mathbb{X}}$ (ASR), g ryze monotonní, $\exists g' \in C^1$, $g' \neq 0$ na B_i $\forall i \in \hat{k}$ (disjunktní intervaly). Pak

$$Y = g(X) \text{ má } ASR \quad a \quad f_Y(y) = \sum_{i=1}^k f_x(g_i^{-1}(y)) \frac{1}{|g'_i(g_i^{-1}(y))|} \quad (\text{derivace inverzní funkce})$$

b) $k = 1$: $f_{\mathbb{Y}}(\mathbf{y}) = f_{\mathbb{X}}(g^{-1}(\mathbf{y})) |\mathbb{J}_{g^{-1}}(\mathbf{y})| \quad \forall \mathbf{y} \in g(G)$

3 Spojitá rozdělení

c) Mějme $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, $y_1 = g(x_1, \dots, x_n)$ tak, že lze jednoznačně vyjádřit x_1 pomocí y_1 a (x_2, \dots, x_n) . Označme $x_1 = h(y_1, \underbrace{\mathbf{x}'}_{=(x_2, \dots, x_n)}) = h(\mathbf{y})$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$, ..., $y_n = x_n$ a předpokládejme, že $\exists \frac{\partial h}{\partial y_1}(\mathbf{y})$ spojitá a nenulová. Tím jsme definovali $\tilde{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (prostou):

$$\mathbb{J}_{\tilde{g}^{-1}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial h}{\partial y_1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I}_{n-1} \end{vmatrix} = \frac{\partial h}{\partial y_1} \neq 0.$$

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{Y}}(\mathbf{y}) &= f_{\mathbb{X}}(\tilde{g}^{-1}(\mathbf{y})) |\mathbb{J}_{\tilde{g}^{-1}}(\mathbf{y})| = f_{\mathbb{X}}(h(y_1, \underbrace{\mathbf{x}'}_{=y_2, \dots, y_n}), y_2, \dots, y_n) \left| \frac{\partial h}{\partial y_1}(y_1, y_2, \dots, y_n) \right| = \\ &= f_{\mathbb{X}}(h(\mathbf{y}), y_2, \dots, y_n) \left| \frac{\partial h}{\partial y_1}(\mathbf{y}) \right| \Rightarrow f_{Y_1}(y_1) = \int f_{\mathbb{Y}}(\mathbf{y}) dy_2 \dots dy_n \end{aligned}$$

c2) Označme $X_1 = X$, $X_2 = Y$, $(X, Y) \stackrel{ASR}{\sim} f_{(X,Y)}$. Transformace $\begin{vmatrix} U = X + Y \\ V = Y \end{vmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $u = x + y$, $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1 \Rightarrow x = u - y =: h(u, y) \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial u} = 1$

$$f_{u,v}(u, v) = f_{X,Y}(u - v, v) \cdot 1$$

$$f_{X+Y}(u) = f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u - v, v) dv \stackrel{id}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u - v) f_Y(v) dv = f_X * f_Y$$

c3) Mějme $(X, Y) \sim f_{X,Y}$ a označme $U = X \cdot Y$

$$x = \frac{u}{y} = \frac{u}{v} =: h(u, v) \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial u} = \frac{1}{v}, \quad v \neq 0$$

$$f_{X \cdot Y}(u) = f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|v|} f_{X,Y}\left(\frac{u}{v}, v\right) dv \stackrel{id}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|v|} f_X\left(\frac{u}{v}\right) f_Y(v) dv$$

Definice 3.15. Řekneme, že $X \sim U(a, b)$, $a < b$, má **uniformní rozdělení** na intervalu (a, b) , pokud $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$, $x \in /a, b/$. (je jedno o které závorky se jedná)

Definice 3.16. Mějme $X \sim U(G)$ (uniformní rozdělení), kde $G \subset \mathbb{R}^n$ a $\lambda(G) < +\infty$. Pak definujeme $f_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) := \frac{1}{\lambda(G)}$ na G . ($\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathbb{X}} d\lambda = \int \frac{1}{\lambda(G)} d\lambda = 1$)

Definice 3.17 (Gaussovo rozdělení). Definujeme Gaussovo rozdělení, ozn. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, ($\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$), pomocí vztahů

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma^2 > 0 \\ F_X(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t-\mu)^2} dt, \quad F_X(+\infty) = 1 \end{aligned}$$

3 Spojitá rozdělení

Definice 3.18. Gaussovo rozdělení pro $\sigma = 1$ a $\mu = 0$ ($X \sim N(0, 1)$) označujeme

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Věta 3.19. 1. $N(\mu, \sigma^2)$ je symetrické rozdělení okolo μ , $N(0, 1)$ je symetrické okolo 0

2. $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3. $f_{N(\mu, \sigma^2)}(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$$F_{N(\mu, \sigma^2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t-\mu)^2} dt = \left| \frac{t-\mu}{\sigma} = u \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

4. $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c^d e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

5. $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \underbrace{aX+b}_Y \sim N(a\mu+b, a^2\sigma^2), a \neq 0$

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) |J_{g^{-1}}(y)| = \left| \begin{array}{l} g: y = ax + b \\ g^{-1}: x = \frac{y-b}{a} \\ J_{g^{-1}}(y) = \frac{1}{a} \end{array} \right| = \frac{1}{|a|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\frac{y-b}{a}-\mu)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \underbrace{|a|\sigma}_{\sigma'}} e^{-\frac{1}{2a^2\sigma^2}(y-\overbrace{(a\mu+b)}^{\mu'})^2} \sim N(\mu', \sigma'^2)$$

6. $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$
 $X \sim N(0, 1) \Rightarrow \sigma X + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$

7.

$$P(\mu-k\sigma \leq X \leq \mu+k\sigma) \stackrel{k \in \mathbb{N}}{=} P\left(-k \leq \underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{N(0,1)} \leq k\right) = \Phi(k) - \underbrace{\Phi(-k)}_{1-\Phi(k)} = -1 + 2\Phi(k) = \begin{cases} 0.6827 & k=1 \\ 0.9545 & k=2 \\ 0.9973 & k=3 \\ \dots & \end{cases}$$

Věta 3.20 (Reprodukce). Mějme $(X_j)_{j=1}^n \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$ nezávislé (id), $\mathbf{a} = (a_j)_{j=1}^n \neq \mathbf{0}$. Pak

$$\sum_{j=1}^n a_j X_j \sim N\left(\sum_{j=1}^n a_j \mu_j, \sum_{j=1}^n a_j^2 \sigma_j^2\right)$$

3 Spojitá rozdělení

Definice 3.21. Říkáme, že \mathbb{X} má **rozdělení z exponenciální třídy**, pokud $\mathbb{X} \sim f(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})c(\Theta)e^{Q(\Theta) \cdot T(\mathbf{x})}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\Theta \in \mathbb{R}^k$, kde

1. $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$,
2. $c(\Theta) \in \mathbb{R}^+$ je normovací konstanta, $c(\Theta) = \int_{\mathbb{R}^n} h e^{Q \cdot T} d\mathbf{x} < +\infty$
3. $Q : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$, $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $k < n$

3.1 Neintegrální charakteristiky

Definice 3.22. Mějme $X \sim f_X$. Potom definujeme **módy** f_X jako $\{x \mid f_X(x) \text{ má v } x \text{ max}\}$.

Definice 3.23. X má **symetrické rozdělení okolo 0**, pokud $X \sim P^X \Leftrightarrow -X \sim P^X$.
 X má **symetrické rozdělení okolo a** , pokud $X - a$ má symetrické rozdělení okolo 0.

Definice 3.24. $X \sim F_X (= P^X/\tau_1)$. Definujeme **α -kvantil rozdělení F_X** jako $x_\alpha = \inf\{x : F_X(x) \geq \alpha\}$ pro $\forall \alpha \in [0, 1]$.

Definice 3.25. Nechť $X \sim P^X(F_X)$ a $\alpha \in (0, 1)$. Potom α -kvantil $x_\alpha = \inf\{x : F_X(x) \geq \alpha\}$. Definujeme následující výrazy:

1. $x_{1/2}$ - **medián** ($X \sim f_X$ ASR)
2. $x_{1/4}$ a $x_{3/4}$ - **kvartily**
3. $(x_{3/4} - x_{1/4})$ - **interkvartilové rozpětí**
4. x_α 100% - **percentil**

Věta 3.26. Nechť $X \sim F_X$ je symetrická okolo $a \in \mathbb{R}$ a ostře roste. Pak $x_\alpha = 2a - x_{1-\alpha} \quad \forall \alpha \in (0, 1)$. Speciálně pro $a = 0$ tedy platí, že $x_\alpha = -x_{1-\alpha}$. (obr. ??)

Definice 3.27. Mějme $X \sim F_X$. Pro $\forall t \in (0, 1)$ je definována **kvantilová funkce** jako

$$F_X^-(t) := \inf\{x : F_X(x) \geq t\},$$

ozn. také F_X^- nebo F_X^{-1} (zobecněná inverzní funkce).

3.2 Integrální charakteristiky

Definice 3.28. Mějme (Ω, \mathcal{A}, P) a λ σ -finitní. Pak funkci $\varphi(\omega) := \sum_{j=1}^k a_j \mathbb{I}_{A_j}(\omega)$, kde

$\forall j \in \hat{k}$, $A_j \in \mathcal{A}$, $a_j \in \mathbb{R}$, nazýváme **simple function** (jednoduchá funkce). Definujeme dále

1.

$$\int_{\Omega} \varphi dP_\lambda := \sum_{j=1}^k a_j P(A_j).$$

3 Spojitá rozdělení

2. $X \geq 0$ je náhodná veličina. Pak definujeme $\int_{\Omega} X dP = \sup \{ \int_{\Omega} \varphi dP : \varphi \text{ simple, } 0 \leq \varphi \leq X \}$
 $[\exists \varphi_n \geq 0, \varphi_n \rightarrow X \quad a \quad \int_{\Omega} X dP = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \varphi_n dP_{\lambda}]$

3. X je libovolná náhodná veličina. Pak definujeme $\int_{\Omega} X dP = \int_{\Omega} X^+ dP - \int_{\Omega} X^- dP$ za předpokladu konečnosti alespoň jednoho integrálu. Označme dále

$$EX = \int_{\Omega} X dP = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega) = \int_{\Omega} X P(d\omega)$$

jako **střední hodnotu**. (angl. **expected value**).

4. Pro $\mathbb{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ jako náhodnou veličinu definujeme $E\mathbb{X} = (EX_1, \dots, EX_n)$.

5. $A \in \mathcal{A}$ definujeme $\int_A X dP = \int_{\Omega} X \mathbb{I}_A dP$, speciálně pro $X \equiv 1$ pak

$$\int_A 1 dP_{\lambda} = P_{\lambda}(A) = \int_{\Omega} \mathbb{I}_A dP_{\lambda} = E(\mathbb{I}_A)$$

Definice 3.29. Označme $\mathcal{L}_1 = \{X \text{ n.vel. na } (\Omega, \mathcal{A}, P) : |EX| < +\infty\} = \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Věta 3.30. \mathcal{L}_1 je vektorový prostor a E je lineární funkcionál na \mathcal{L}_1 , "tzn."

$$E\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j X_j\right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j EX_j.$$

Věta 3.31. $X \in \mathcal{L}_1 \Leftrightarrow |X| \in \mathcal{L}_1 \quad a \quad |EX| \leq E|X|$.

Důsledek 3.32. $\mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P) \Rightarrow$ každá omezená náhodná veličina je integrovatelná.

Věta 3.33. Mějme X, Y náhodné veličiny na (Ω, \mathcal{A}, P) tak, že EX, EY existují a nechť $\underbrace{P(X=Y)}_A = 1$. Pak $EX = EY$.

Definice 3.34. (Ω, \mathcal{A}, P) . Pak $N \subset \Omega$ se nazývá **nulová množina** (pro P), pokud $\exists A \in \mathcal{A}$, $N \subset A$ a platí, že $P(A) = 0$. Definujme nyní

$$\mathcal{N} = \{N \subset \Omega : N \text{ je nulová vzhledem k } P\}.$$

Potom řekneme, že nějaká vlastnost V platí **skoro jistě na P** (s.j. P), pokud $\exists N \in \mathcal{N}$ tak, že tato vlastnost V platí na $\Omega \setminus N$.

Definice 3.35. (Ω, \mathcal{A}, P) . Definujme $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \mathcal{N} := \{A \cup N : A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}\}$ jako **zúplnění** σ -algebry \mathcal{A} .

Definujme dále \bar{P} tak, že $\bar{P}(A \cup N) = P(A)$, $\forall A \in \mathcal{A}, \forall N \in \mathcal{N}$ jako **rozšíření** P z \mathcal{A} na $\bar{\mathcal{A}}$. $(\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\Omega, \bar{\mathcal{A}}, \bar{P})$:

$$A = \emptyset \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{P}(N) = \bar{P}(A \cup N) = \bar{P}(\emptyset \cup N) = P(\emptyset) = 0, \quad \forall N \in \mathcal{N}$$

Věta 3.36. Mějme X, Y tak, že EX, EY existuje a nechť $X = Y$ s.j. P . Pak $EX = EY$.

3 Spojitá rozdělení

Definice 3.37. $X = Y$ s.j. P je relací ekvivalence $X \sim Y$. Vezměme nyní \mathcal{L}_1 a definujme $L_1(\Omega, \mathcal{A}, P) := \mathcal{L}_1 / \sim$. Pro $T \in L_1$ (T je třída ekvivalence) definujeme $E(T) = E(X)$, kde $X \in T$. Dále definujeme na L_1 **normu** $\|X\|_{L_1} := E|X|$. (na \mathcal{L}_1 je to pseudonorma)

Definice 3.38. $L_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je lineární normovaný prostor s normou $\|\cdot\|_{L_1}$. Říkáme, že $X_n \xrightarrow{L_1} X$, pokud $\|X_n - X\|_{L_1} \rightarrow 0$. (L_1 je Banachův prostor)

Věta 3.39.

a) $X \leq Y$ s.j. $P \Rightarrow EX \leq EY$ (za předpokladu existence).

b) $X \geq 0$ s.j. $P \Rightarrow EX \geq 0$

Věta 3.40 (MCT - Monotone Convergence Theorem). Mějme $(\Omega, \mathcal{A}, P_\lambda)$, $X_n \geq 0$ s.j. P a $X_n \nearrow X$ s.j. P . Pak $EX_n \rightarrow EX$.

Věta 3.41 (LDCT - Lebesgue's Dominated Convergence Theorem). Mějme $(\Omega, \mathcal{A}, P_\lambda)$, $X_n \rightarrow X$ s.j. P a $|X_n| \leq Y$ s.j. P , kde $Y \in \mathcal{L}_1$. Pak $X_n \in \mathcal{L}_1$, $X \in \mathcal{L}_1$ a $EX_n \rightarrow EX$.

Věta 3.42 (Beppo-Levi). Necht' $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ jsou náhodné veličiny na (Ω, \mathcal{A}, P) tak, že $\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{E|X_n|}_{\|X_n\|_{L_1}} < +\infty$. Pak $\sum_{n=1}^{+\infty} X_n < +\infty$ s.j. P , $\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} X_n}_Y \in \mathcal{L}_1$ a $E\left(\sum_{n=1}^{+\infty} X_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} EX_n$.

Věta 3.43 (Markovova nerovnost). Mějme $X \in \mathcal{L}_1$ na (Ω, \mathcal{A}, P) . Pak $(\forall \varepsilon > 0) \left(P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E|X|}{\varepsilon} \right)$.

Věta 3.44 (Jenssenova nerovnost). Mějme $X \in \mathcal{L}_1$, $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvexní na intervalu \mathcal{I} tak, že $P(X \in \mathcal{I}) = P^X(\mathcal{I}) = 1$. Pokud $\Phi(X) \in \mathcal{L}_1$, pak $E[\Phi(X)] \geq \Phi(EX)$.

Důsledek 3.45. $\Phi(t) = t^2 \Rightarrow E(X^2) \geq (EX)^2$

Definice 3.46. Mějme $(\Omega_j, \mathcal{A}_j, P_j) \forall j \in \hat{n}$. Definujme $\bigtimes_{j=1}^n \mathcal{A}_j := \{ \bigtimes_{j=1}^n A_j : A_j \in \mathcal{A}_j \}$. Dále pak definujeme $\bigotimes_{j=1}^n \mathcal{A}_j = \sigma(\bigtimes_{j=1}^n \mathcal{A}_j)$ a $\bigotimes_{j=1}^n P_j$ předpisem pro její funkční hodnoty na generujícím systému $\bigtimes_{j=1}^n \mathcal{A}_j$ jako

$$\bigotimes_{j=1}^n P_j \left(\bigtimes_{j=1}^n A_j \right) = \prod_{j=1}^n P_j(A_j), \quad \forall A_j \in \mathcal{A}_j$$

a nazýváme ji **součinová míra**.

Věta 3.47. Součinová míra existuje, je jednoznačná a je to pravděpodobnostní míra.

Věta 3.48. Mějme $(X_j)_{j=1}^n$ náhodné veličiny na (Ω, \mathcal{A}, P) a $\mathbb{X} \sim P^{\mathbb{X}}$. Pak $(X_j)_{j=1}^n$ jsou nezávislé $\Leftrightarrow P^{\mathbb{X}} = \bigotimes_{j=1}^n P^{X_j}$.

Věta 3.49 (Tonelli-Fubini). Mějme $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2)$ a necht' $X : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ je náhodnou veličinou na $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$. Pak

$$E^{P_1 \otimes P_2}(X) = E^{P_2} [E^{P_1}(X)] \text{ za předpokladu existence } E^{P_1 \otimes P_2}(X).$$

3 Spojitá rozdělení

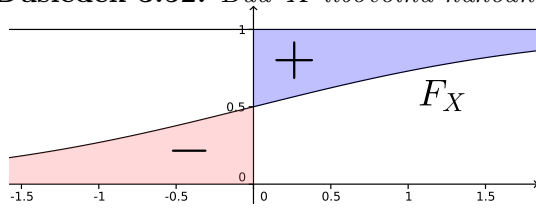
Věta 3.50. Necht' $X \geq 0$ je jednorozměrná náhodná veličina na (Ω, \mathcal{A}, P) . Pak

$$EX = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(x)) dx.$$

Věta 3.51. Necht' $X \leq 0$ je jednorozměrná náhodná veličina na (Ω, \mathcal{A}, P) . Pak

$$EX = - \int_{-\infty}^0 F_X(x) dx$$

Důsledek 3.52. Bud' X libovolná náhodná veličina. Pak



$$EX = EX^+ - EX^- = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(x)) dx - \int_{-\infty}^0 F_X(x) dx$$

za předpokladu konečnosti jednoho z integrálů.

Věta 3.53 (VPI - Věta o přenosu integrace). Necht' $\mathbb{X} \sim P^{\mathbb{X}}$ je náhodná veličina, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je borelovsky měřitelná. Pak

$$\int_{\Omega} g \circ \mathbb{X} dP = \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) d(\underbrace{P \circ \mathbb{X}^{-1}}_{P^{\mathbb{X}}}) \text{ za předpokladu existence alespoň jednoho integrálu.}$$

Navíc pokud \mathbb{X} má ASR_{λ} s $f_{\mathbb{X}}$ ($f_{\mathbb{X}} = \frac{dP^{\mathbb{X}}}{d\lambda}$), pak

$$\int_{\Omega} g \circ \mathbb{X} dP = \int_{\mathbb{R}} g(\mathbf{x}) f_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) d\lambda, \text{ pokud } g(\mathbb{X}) \in \mathcal{L}_1.$$

V případě, že \mathbb{X} má diskrétní rozdělení, tzn. $P(\mathbb{X} = \mathbf{x}_k) = p_k$, pak

$$\int_{\Omega} g \circ \mathbb{X} dP = \sum_k g(\mathbf{x}_k) p_k = \int_{\mathbb{R}} g(\mathbf{x}) f_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) d\mu_c, \text{ kde } \mu_c\{\mathbf{x}_k\} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Věta 3.54. Necht' $(X_j)_{j=1}^{+\infty}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin na (Ω, \mathcal{A}, P) , $X_j \in \mathcal{L}_1$. Pak

$$E\left[\underbrace{\prod_{j=1}^n X_j}_{Y=g(\mathbb{X})}\right] = \prod_{j=1}^n EX_j \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definice 3.55.

1. $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, P) = \{X \text{ náhodná veličina na } (\Omega, \mathcal{A}, P) : E(X^2) \stackrel{\text{ozn}}{=} EX^2 < +\infty, X^2 \in \mathcal{L}_2\}$
2. $L_2(\Omega, \mathcal{A}, P_n) = \mathcal{L}_2 / \sim$, kde $X \sim Y \Leftrightarrow X = Y \text{ s.j. } P$

3 Spojitá rozdělení

$$3. E(X \cdot Y) = \langle X, Y \rangle$$

$$4. \|X\|_2 = \sqrt{\langle X, X \rangle} = \sqrt{EX^2}$$

Věta 3.56 (Schwarz). *Nechť $X, Y \in \mathcal{L}_2$. Pak $X \cdot Y \in \mathcal{L}_1$ a platí, že $|E(X \cdot Y)| \leq \|X\|_2 \cdot \|Y\|_2$, přičemž $|E(X \cdot Y)| = \|X\|_2 \cdot \|Y\|_2 \Leftrightarrow (\exists \alpha \neq 0)(Y = \alpha X \text{ s.j. } P)$ (což je ale např. u Diracovy míry pouze v jednom bodě).*

Důsledek 3.57. *Prostor $(L_2, \|\cdot\|_2)$ je úplný lineární normovaný prostor se skalárním součinem (Hilbertův).*

Věta 3.58. $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, P) \subset \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Definice 3.59. Mějme $X \in \mathcal{L}_2$. Potom definujeme **rozptyl náhodné veličiny X** jako

$$DX (= \text{Var } X) := E(X - EX)^2 = E(X^2 - 2X \cdot EX + (EX)^2) = EX^2 - (EX)^2 \geq 0.$$

Dále definujeme **směrodatnou odchylku** jako $\sigma(X) := \sqrt{DX}$ a **standardizovanou náhodnou veličinu** jako $Y = \frac{X-EX}{\sqrt{DX}}$. ($EY = 0, DY = 1$)

Věta 3.60.

$$X \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow D(\alpha X + \beta) = E[(\alpha X + \beta) - E(\alpha X + \beta)]^2 = E[\alpha(X - EX)]^2 = \alpha^2 DX$$

Důsledek 3.61. $D(\beta) = 0, X = \beta \text{ s.j. } P \Rightarrow DX = E\left(0_{s.j.}^2\right) = 0$

Definice 3.62. Nechť $X, Y \in \mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Definujeme **kovarianci** jako

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - EX)(Y - EY)] = E(X \cdot Y - XEY - YEX + EX \cdot EY) = E(X \cdot Y) - EX \cdot EY$$

Věta 3.63. *Pro kovarianci platí, že*

$$1. \text{Cov}(X, X) = DX \geq 0$$

2. *je symetrická*

$$3. X, Y \text{ nezávislé} \Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = 0 \text{ (definujeme } X, Y \text{ nekorelované)}$$

$$4. \text{obměna 3): } \text{Cov}(X, Y) \neq 0 \Rightarrow X \text{ a } Y \text{ nejsou nezávislé}$$

Věta 3.64. *Mějme nezávislé náhodné veličiny $(X_j)_{j=1}^n \in \mathcal{L}_2$. Pak*

$$D\left(\sum_{j=1}^n X_j\right) = \sum_{j=1}^n DX_j.$$

Věta 3.65 (Čebyševova nerovnost). *Bud' $X \in \mathcal{L}_2$. Pak $(\forall \varepsilon > 0) \left(P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2} \right)$.*

Definice 3.66. Mějme náhodné veličiny X, Y , kde $DX > 0, DY > 0$ (nedegenerované). Definujeme **korelační koeficient**

$$\varrho(X, Y) = \varrho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}.$$

3 Spojitá rozdělení

Věta 3.67. Mějme náhodné veličiny $X, Y \in \mathcal{L}_2$, kde $DX > 0$, $DY > 0$ (nedegenerované). Pak $|\varrho(X, Y)| \leq 1$ a platí, že

$$\varrho = \pm 1 \Leftrightarrow \exists \beta \geq 0 \text{ tak, že } Y - EY = \beta(X - EX) \text{ s.j. } P$$

Definice 3.68. Mějme $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)$, $X_j \in \mathcal{L}_2$. Pak definujeme **kovarianční matici** vztahem

$$\mathbb{C}(\mathbb{X}) := (\text{Cov}(X_i, X_j))_{i,j=1}^{+\infty}.$$

Věta 3.69. Nechť $\mathbb{C}(\mathbb{X})$ je symetrická, PSD (pozitivně semidefinitní) a $\text{diag}(\mathbb{C}) = (DX_1, \dots, DX_n)$. Pak pro $Y := \sum_{j=1}^n \alpha_j X_j$ platí, že $0 \leq \alpha \mathbb{C} \alpha^T$.

Definice 3.70. Definujeme

1. $R(\mathbb{X}) = (\varrho(X_i, X_j))_{i,j=1}^n$ jako **korelační matici**, kde $\text{diag}(R(\mathbb{X})) = \mathbb{I}$
2. $\mathcal{L}_{p \geq 1} = \{X \text{ náhodná veličina na } (\Omega, \mathcal{A}, P) : |X|^p \in \mathcal{L}_1\}$
3. $L_p = \mathcal{L}_p / \sim$ kde $X \sim Y \Leftrightarrow X = Y$ s.j. P
4. pro náhodnou veličinu $X \in \mathcal{L}_p$ definujeme funkci $\|X\|_p = \sqrt[p]{E|X|^p}$

Věta 3.71 (Hölderova nerovnost). Nechť $X \in \mathcal{L}_{p \geq 1}$ a $Y \in \mathcal{L}_{q \geq 1}$ tak, že $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pak $X \cdot Y \in \mathcal{L}_1$ a platí vztah

$$|E(X \cdot Y)| \leq E|X \cdot Y| \leq \|X\|_p \cdot \|Y\|_q$$

Důsledek 3.72. $\|X\|_p$ je pseudonorma na $\mathcal{L}_{p \geq 1}$ a norma na L_p .

Věta 3.73. Nechť $1 \leq p \leq q < +\infty$. Pak $\mathcal{L}_q(\Omega, \mathcal{A}, P) \subset \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, P)$. (platí jen pro konečnou míru)

Definice 3.74. Definujeme $\mu'_k(X) = \mu'_k = E(X^k)$ za předpokladu, že $E(X^k)$ existuje, $k \in \mathbb{N}$, a nazýváme ho **obecný k-tý moment** náhodné veličiny X . Definujeme dále $\mu_k(X) = \mu_k = E[(X - EX)^k]$ jako **centrální k-tý moment** náhodné veličiny X za předpokladu existence pravé strany, $k \in \mathbb{N}$.

1. $\mu'_1 = EX$, $\mu_1 = 0$
2. $\mu_2 = DX$
3. $\mu_3(U) = \mu_3\left(\frac{X}{\sigma(X)}\right) = \frac{\mu_3(X)}{[\sigma(X)]^3}$ nazýváme **šikmost rozdělení** náhodné veličiny X .
 $\mu_3(U) = 0 \Rightarrow X$ má symetrické rozdělení okolo EX .
4. $\mu_4(U) = \mu_4\left(\frac{X}{\sigma(X)}\right) = \frac{\mu_4(X)}{[\sigma(X)]^4}$ nazýváme **špičatost rozdělení** náhodné veličiny X .
 $\mu_4(U) = 3$ pro libovolné $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.
5. $\mu_e := \mu_4(U) - 3$ nazveme **koefficient špičatosti**.

Definice 3.75. Definujeme $\mathcal{L}_\infty := \{X \text{ náhodná veličina na } (\Omega, \mathcal{A}, P) : X \text{ s.j. } P \text{ omezená}\}$. Definujeme dále $\|X\|_\infty = \text{ess sup } X$ jako nejmenší konstantu c , pro kterou platí $|X| < c$ s.j. P .

Věta 3.76. Platí, že $\mathcal{L}_\infty \subset \mathcal{L}_{p \geq 1}$ a $\| \cdot \|_\infty = \lim_{p \rightarrow +\infty} \| \cdot \|_p$.

3.3 Charakteristické funkce náhodných veličin

Definice 3.77. Mějme \mathbb{X} náhodnou veličinu na (Ω, \mathcal{A}, P) . Definujeme **charakteristickou funkci** náhodné veličiny \mathbb{X} $\varphi_{\mathbb{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ vztahem

$$\varphi_{\mathbb{X}}(\mathbf{t}) := E \left(\underbrace{e^{i\mathbf{t} \cdot \mathbb{X}}}_{Y: \Omega \rightarrow \mathbb{C}} \right) = \int_{\Omega} e^{i\mathbf{t} \cdot \mathbb{X}} dP \stackrel{\text{VPI}}{=} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\mathbf{t} \cdot \mathbf{x}} dP^{\mathbb{X}}}_{\mathfrak{F}(P^{\mathbb{X}})} \stackrel{\text{ASR}}{=} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\mathbf{t} \cdot \mathbf{x}} f_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) d\lambda}_{\mathfrak{F}(f_{\mathbb{X}})} \stackrel{\lambda \text{ čítací}}{=} \sum_k e^{i\mathbf{t} \cdot x_k} \underbrace{f_{\mathbb{X}}(x_k)}_{p_k},$$

kde \mathfrak{F} je Fourierova transformace.

Věta 3.78. Mějme (Ω, \mathcal{A}, P) s konečnou mírou. Potom pro $\varphi_{\mathbb{X}}$ platí:

1. vždy existuje,
2. je omezená, $|\varphi_{\mathbb{X}}| \leq 1$,
3. $\varphi_{\mathbb{X}}(\mathbf{0}) = 1$,
4. je spojitá.
5. Nechť dále $\mathbb{X} \in \mathcal{L}_k$ po složkách. Pak $\varphi_{\mathbb{X}} \in \mathcal{C}^k$ a platí

$$\frac{\partial \varphi_{\mathbb{X}}}{\partial t_{j_1} \dots \partial t_{j_k}}(\mathbf{0}) = i^k E(X_{j_1} X_{j_2} \dots X_{j_k}).$$

Důsledek 3.79. Platí, že

$$\begin{aligned} (X, Y) \in \mathcal{L}_{r+s} &\Rightarrow E(X^r Y^s) = (-1)^{r+s} i^{r+s} \frac{\partial \varphi_{\mathbb{X}}}{\partial t_1^r \partial t_2^s}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \\ X \in \mathcal{L}_r, s = 0 &\Rightarrow \mu'_r(X) = E(X^r) = (-1)^r i^r \frac{\partial \varphi_{\mathbb{X}}}{\partial t_{(1)}^r}(\mathbf{0}) \end{aligned}$$

Speciálně pak $DX = E(X^2) - (EX)^2 = -\frac{\partial^2 \varphi_{\mathbb{X}}}{\partial t^2}(\mathbf{0}) - \left(-i \frac{\partial \varphi_{\mathbb{X}}}{\partial t}(\mathbf{0})\right)^2 = -\frac{\partial^2 \varphi_{\mathbb{X}}}{\partial t^2}(\mathbf{0}) + \left(\frac{\partial \varphi_{\mathbb{X}}}{\partial t}(\mathbf{0})\right)^2$.

Definice 3.80. Mějme náhodnou veličinu $\mathbb{X} \sim P^{\mathbb{X}}$. Pak definujeme **momentovou vytvářející funkci** (MGF) vztahem

$$m_{\mathbb{X}}(\mathbf{t}) = E(e^{\mathbf{t} \cdot \mathbb{X}}) \stackrel{\text{VPI}}{=} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathbf{t} \cdot \mathbf{x}} dP^{\mathbb{X}}}_{\mathcal{L}(P^{\mathbb{X}})} \stackrel{P^{\mathbb{X}} \ll \lambda}{=} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathbf{t} \cdot \mathbf{x}} f_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) d\lambda}_{\mathcal{L}(f_{\mathbb{X}})}$$

Vlastnosti $\varphi_{\mathbb{X}}$ aplikovatelné i na $m_{\mathbb{X}}$:

- a) Ne (existence)
- b) Ne (omezenost)
- c) Ano ($m_{\mathbb{X}}(\mathbf{0}) = E1 = 1$)

3 Spojitá rozdělení

d) Ano (spojitost)

e) Ano. Necht' $\mathbb{X} \in \mathcal{L}_k$ po složkách. Pak $m_{\mathbb{X}} \in \mathcal{C}^k$ a platí

$$\frac{\partial m_{\mathbb{X}}}{\partial t_{j_1} \dots \partial t_{j_k}}(\mathbf{0}) = E(X_{j_1} X_{j_2} \dots X_{j_k}).$$

Věta 3.81. Mějme náhodnou veličinu $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$. Necht' $m_X(t)$ existuje na nějakém okolí $H_{t=0}$. Pak

$$\varphi_X(t) = m_X(it) = E(e^{\mu X})|_{\mu=it} = E(e^{itX}) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Věta 3.82. Necht' $(X_j)_{j=1}^n$ jsou náhodné veličiny na (Ω, \mathcal{A}, P) s rozdělením P^{X_j} . Pokud $(X_j)_{j=1}^{+\infty}$ jsou nezávislé, tak platí, že

$$\varphi_{\sum_1^n X_j}(t) = \prod_{j=1}^n \varphi_{X_j}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Pokud existuje m_{X_j} , pak analogicky platí, že $m_{\sum_1^n X_j}(t) = \prod_{j=1}^n m_{X_j}(t)$.

Věta 3.83 (Inverzní formule). Necht' $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je náhodná veličina s F_X . Pro $\forall a, b \in \mathbb{R}$, kde $a < b$ jsou body spojitosti F_X platí, že

$$P^X((a, b]) = P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \frac{1}{2\pi} \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{-c}^c \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} \varphi_X(t) dt.$$

Důsledek 3.84. Charakteristická funkce φ_X jednoznačně určuje P^X . Pro libovolné $b \in \mathbb{R}$ pak platí, že F_X je v b spojitá zprava.

Věta 3.85. Mějme náhodnou veličinu X s φ_X . Necht' $\varphi_X \in L_1(\mathbb{R}, dx)$. Pak

$$\exists f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi_X(t) dt = \mathfrak{F}^{-1}(\varphi_X). \quad (f_X \text{ je nutně spojitá a omezená})$$

Lemma 3.86. Mějme $\mathbb{X}, \varphi_{\mathbb{X}}$ a necht' $\mathcal{I} \in \tau_{4,n} = \left\{ \bigtimes_{j=1}^n (a_j, b_j] : a_j, b_j \in \mathbb{R} \right\}$. Pak

$$P^{\mathbb{X}}(\mathcal{I}) = P(\mathbb{X} \in \mathcal{I}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{-c}^c \prod_{j=1}^n \left(\frac{e^{-iat_j} - e^{-ibt_j}}{it_j} \right) \varphi_{\mathbb{X}}(\mathbf{t}) d\mathbf{t}.$$

Věta 3.87. Necht' \mathbb{X} je náhodná veličina do \mathbb{R}^n . Pak $\varphi_{\mathbb{X}} \leftrightarrow P^{\mathbb{X}}$.

Věta 3.88. Mějme $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)$ náhodnou veličinu do \mathbb{R}^n . Potom platí, že X_1, \dots, X_n jsou nezávislé $\Leftrightarrow \varphi_{\mathbb{X}}(\mathbf{t}) = \prod_{j=1}^n \varphi_{X_j}(t_j), \forall \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$.

4 Konvergence na prostoru náhodných veličin

Definice 4.1. Mějme $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ na \mathcal{L}_p , případně $L_p(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Definujeme $X_n \xrightarrow{L_p} X$, pokud $\|X_n - X\| \rightarrow 0$, $\|X_n - X\|_{L_p}^p = E[|X_n - X|^p]$.

Věta 4.2. Necht' $1 \leq p \leq q \leq +\infty$. Pak na (Ω, \mathcal{A}, P) platí, že

$$\mathcal{L}_q \subset \mathcal{L}_p \text{ a } X_n \xrightarrow{L_q} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{L_p} X.$$

Definice 4.3. Mějme $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ náhodné veličiny na (Ω, \mathcal{A}, P) . Pak definujeme **konvergenci s.j.** jako $X_n \xrightarrow{s.j. (P)} X$, pokud $P\{\omega : X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)\} = 1$.

Věta 4.4.

$$\begin{aligned} X_n \xrightarrow{s.j.} X &\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{n \geq k} \{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}\right) = 0 \right) \\ &\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{n \geq k} \{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\}\right) = 1 \right) \end{aligned}$$

Důsledek 4.5.

$$X_n \xrightarrow{s.j.} X \Rightarrow P(\{\omega : |X_n - X| \geq \varepsilon\}) \rightarrow 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

Definice 4.6. Mějme $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$. Pak definujeme **konvergenci podle P**, ozn. $X_n \xrightarrow{P} X$, jako

$$(\forall \varepsilon > 0) \left(P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \rightarrow 0 \right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) \left(P(|X_n - X| < \varepsilon) \rightarrow 1 \right).$$

Věta 4.7. $X_n \xrightarrow{s.j.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$ (nelze obrátit)

Věta 4.8.

$$X_n \xrightarrow{P} X \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} E \left(\underbrace{\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|}}_{\varrho(X_n, X)} \right) = 0,$$

kde $\varrho(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ je metrika.

Lemma 4.9. $X_n \xrightarrow{L_p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$

Věta 4.10. $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow \exists (n_k)_{k=1}^{+\infty}$ tak, že $X_{n_k} \xrightarrow{s.j.} X$.

Věta 4.11 (LDCT podle P). Necht' $X_n \xrightarrow{P} X$ a $(\forall n \in \mathbb{N}) (|X_n| \overset{s.j.}{\leq} Y \in \mathcal{L}_{p \geq 1})$.

Pak $X \in \mathcal{L}_p$ a $X_n \xrightarrow{L_p} X$.

4 Konvergence na prostoru náhodných veličin

Věta 4.12. Mějme $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ do \mathbb{R}^s , $g : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^1$ borelovsky měřitelnou a spojitou s.j. P^X .
Potom

$$\begin{aligned} X_n \xrightarrow{s.j.} X &\Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{s.j.} g(X), \text{ tedy } g \circ X_n \xrightarrow{s.j.} g \circ X \\ X_n \xrightarrow{P} X &\Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{P} g(X), \text{ tedy } g \circ X_n \xrightarrow{P} g \circ X. \end{aligned}$$

Důsledek 4.13. Mějme $X_n \xrightarrow{P} X$ a $Y_n \xrightarrow{P} Y$, $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ měřitelnou spojitou s.j. $P^{(X,Y)}$.
Pak $g(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} g(X, Y)$

Důsledek 4.14.

$$X_n \xrightarrow{P} X \text{ a } Y_n \xrightarrow{P} Y \Rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$$

5 Limitní věty - Zákony velkých čísel (Laws of Large Numbers)

Domluva: Mějme náhodné veličiny $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ na (Ω, \mathcal{A}, P) , označme $S_n := \sum_{j=1}^n X_j$, $\overline{X}_n := \frac{S_n}{n}$,

$$X_j \in \mathcal{L}_1 \quad \Rightarrow \quad EX_j \stackrel{ozn}{=} \mu_j, \quad \overline{\mu}_n \stackrel{ozn}{=} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mu_j$$

$$X_j \in \mathcal{L}_2 \quad \Rightarrow \quad DX_j \stackrel{ozn}{=} \sigma_j^2, \quad \overline{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sigma_j^2$$

$$X_j \in \mathcal{L}_1 \stackrel{iid}{\Rightarrow} EX_j = \mu_j = \mu \quad \Rightarrow \quad \overline{\mu}_n = \mu$$

$$X_j \in \mathcal{L}_2 \stackrel{iid}{\Rightarrow} DX_j = \sigma_j^2 = \sigma^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{\sigma}_n^2 = \sigma^2$$

Věta 5.1 (Čebyševova, SlZVČ). *Nechť $(X_j)_{j=1}^{+\infty} \in \mathcal{L}_2$ jsou po dvou nezávislé. Pak platí*

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} DX_j = \sup_{j \in \mathbb{N}} \sigma_j^2 < +\infty \quad \Rightarrow \quad \overline{X}_n - \overline{\mu}_n \xrightarrow{P} 0.$$

Důsledek 5.2. *Pokud existuje $\lim_{n \rightarrow +\infty} \overline{\mu}_n \stackrel{ozn}{=} m \in \mathbb{R}$, pak $\overline{X}_n \xrightarrow{P} m$.*

Věta 5.3 (Standardní SlZVČ). *Mějme $(X_j)_{j=1}^{+\infty} \in \mathcal{L}_2$ iid. Pak $\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu = EX_j \quad \forall j \in \mathbb{N}$, tzn. $(\forall \varepsilon > 0) \left(P(|\overline{X}_n - \mu| < \varepsilon) \rightarrow 1 \right)$.*

Věta 5.4 (Bernoulliho SlZVČ). *Mějme $(X_j)_{j=1}^{+\infty} \stackrel{id}{\sim} A(p)$, tedy*

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{s pravděpodobností } p \in (0, 1) \\ 0 & \text{s pravděpodobností } 1 - p = q \end{cases}, \quad p = P(B) \text{ (jevu } B), \quad EX_j = p, \quad DX_j = pq,$$

pak

$$\overline{X}_n = \underbrace{\frac{S_n}{n}}_{\text{Relativní četnost výskytu jevu } B} \xrightarrow{P} p = P(B)$$

a po dosazení do Čebyševovy nerovnosti:

$$(\forall \varepsilon > 0) \left(P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \right)$$

Věta 5.5 (Standardní SlZVČ). *Mějme $(X_j)_{j=1}^{+\infty}$ iid \mathcal{L}_2 . Pak $\overline{X}_n \xrightarrow{s.j.} \mu$, tzn.*

$$P\left(\left\{\omega : \lim_{n \rightarrow +\infty} \overline{X}_n(\omega) = \mu\right\}\right) = 1.$$

5 Limitní věty - Zákony velkých čísel (Laws of Large Numbers)

Věta 5.6 (Borel. SiZVČ). *Mějme nezávislé $(X_j)_{j=1}^{+\infty} \sim A(p)$. Pak $\overline{X_n} \xrightarrow{s.j.} p = P(B)$.*

Lemma 5.7 (Kolmogorovova nerovnost). *Mějme vzájemně nezávislé $(X_j)_{j=1}^{+\infty} \in \mathcal{L}_2$, $EX_j = 0$. Pak*

$$(\forall \varepsilon > 0) \left(P \left(\max_{k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{DS_n}{\varepsilon^2} = \frac{ES_n^2}{\varepsilon^2} - \underbrace{\frac{(ES_n)^2}{\varepsilon^2}}_{=0} \right).$$

Věta 5.8 (Kolmogorov 1 - SiZVČ). *Mějme vzájemně nezávislé $(X_j)_{j=1}^{+\infty} \in \mathcal{L}_2$. Potom platí*

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\sigma_j^2}{j^2} < +\infty \quad \Rightarrow \quad \overline{X_n} - \overline{\mu_n} \xrightarrow{s.j.} 0.$$

Věta 5.9 (Kolmogorov 2). *Mějme $(X_j)_{j=1}^{+\infty}$ iid \mathcal{L}_1 . Pak platí, že $(\forall j \in \mathbb{N}) (\overline{X_n} \xrightarrow{s.j.} \mu = EX_j)$.*

Definice 5.10 (Slabá konvergence měr pravděpodobnosti). *Mějme posloupnost náhodných veličin $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ na $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$ tak, že X_n jsou zobrazení do \mathbb{R}^s . Nechť X je náhodná veličina do \mathbb{R}^s na $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$, tzn. $X_n \sim P^{X_n}$ a $X \sim \tilde{P}^X$. Říkáme, že $P^{X_n} \xrightarrow{w} \tilde{P}^X$ **konverguje slabě**, pokud $\forall g \in C_B^{(0)}$ (reálné, spojité, omezené) platí*

$$\int_{\mathbb{R}^s} g(x) dP^{X_n} \rightarrow \int_{\mathbb{R}^s} g(x) d\tilde{P}^X$$

A po aplikaci věty o přenosu integrace

$$\int_{\mathbb{R}^s} g(x) dP^{X_n} = \int_{\Omega_n} g(X_n) dP_n \rightarrow \int_{\tilde{\Omega}} g(X) d\tilde{P}, \text{ tedy } E_g^{P_n}(X_n) \rightarrow E^{\tilde{P}} g(X) \quad \forall g \in C_B^{(0)}$$

Věta 5.11. *Nechť $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n) = (\Omega, \mathcal{A}, P) = (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$ a $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost náhodných veličin na (Ω, \mathcal{A}, P) . Pak*

$$X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow P^{X_n} \xrightarrow{w} P^X.$$

Důsledek 5.12. $X_n \xrightarrow{L_p} X \Rightarrow P^{X_n} \xrightarrow{w} P^X$ (nelze obrátit)

Věta 5.13. *Implikace $\xrightarrow{w} \Rightarrow \xrightarrow{P}$ platí, pokud $X \stackrel{s.j.}{=} c$ (tzn. $P^X = \delta_c$ a X má degenerované rozdělení).*

Věta 5.14. *Mějme $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$, X náhodné veličiny do \mathbb{R}^1 . Pak $P^{X_n} \xrightarrow{w} P^X \Leftrightarrow F_{X_n} \rightarrow F_X$ na (libovolném) \tilde{D} husté v \mathbb{R} .*

Pro implikaci \Rightarrow lze za \tilde{D} zvolit $\tilde{D} = D_X = \{x \in \mathbb{R}^1 : F_X(x-) = F_X(x)\}$, tzn. D_X je množina bodů spojitosti F_X . (bodů nespojitosti F_X je nejvýše spočetně mnoho)

Definice 5.15. Domluva: $P^{X_n} \xrightarrow{w} P^X$ ozn. $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, případně $X_n \xrightarrow{(\mathcal{L})} X$ (podle anglického Law) a říkáme, že X_n **konverguje v distribuci**.

Věta 5.16 (Skorochodův reprezentační teorém). *Mějme posloupnost náhodných veličin $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ do \mathbb{R}^s , kde $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$. Pak existuje $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ a $(Y_n)_{n=1}^{+\infty}$ posloupnost náhodných veličin na $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ takových, že $P^{X_n} = P^{Y_n}$, $P^X = P^Y$ a $Y_n \xrightarrow{s.j.} Y$.*

5 Limitní věty - Zákony velkých čísel (Laws of Large Numbers)

Věta 5.17. Mějme $(X_j)_{j=1}^{+\infty}$ náhodných veličin X do \mathbb{R}^s a necht' $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$. Mějme $h : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ měřitelnou a spojitou s.j. P^X . Pak $h(X_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} h(X)$.

Důsledek 5.18. Necht' $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$, $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ borelovská a spojitá s.j. $P^{(X,Y)}$. Pak **neplatí**, že $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X, Y)$. ($\xrightarrow{\mathcal{D}}$ není konvergence po složkách, takže obecně **neplatí**, že $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X + Y$).

Věta 5.19 (Slutskyho perturbační teorém). Mějme náhodné veličiny $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ do \mathbb{R}^s tak, že $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$. Necht' dále $(Y_n)_{n=1}^{+\infty}$ jsou n.v. do \mathbb{R}^s tak, že $|X_n - Y_n| \xrightarrow{P} 0$. Pak $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$.

Lemma 5.20. Necht' $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ a $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} c$. Pak $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X, c)$.

Věta 5.21 (Slutskyho lemma). Necht' $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ a $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} c$. Pak

1. $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X + c$
2. $X_n \cdot Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \cdot c$
3. $X_n/Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X/c$, $c \neq 0$.

Věta 5.22 (Lévy continuity theorem). Platí několik verzí:

1. $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \Leftrightarrow \varphi_{X_n} \rightarrow \varphi_X \quad v \mathbb{R}^s$
2. $P^{X_n} \xrightarrow{w} P^X \Leftrightarrow \mathcal{F}(P^{X_n}) \rightarrow \mathcal{F}(P^X)$
3. $\mathcal{F}^{-1}(P^{X_n}) \rightarrow \mathcal{F}^{-1}(P^X) \Leftrightarrow \varphi_{X_n} \rightarrow \varphi_X$

Věta 5.23 (Hélly). Mějme \mathbb{R}^1 a označme $\mathcal{F} = \{F : F \text{ neklesá, je zprava spojitá a } 0 \leq F \leq 1\}$.

$FF_{distr. fce} \subset \mathcal{F}$.

Pak \mathcal{F} je kompaktní prostor funkcí vzhledem ke slabé limitě $F_n \rightarrow F$, tzn.

$(\forall F_n \in \mathcal{F})(\exists F_{n_k} \in \mathcal{F})(F_{n_k} \rightarrow F \in \mathcal{F})$ na $\text{Dom}(F)$.

Definice 5.24. Mějme posloupnost náhodných veličin $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ do \mathbb{R}^1 . Říkáme, že je **asymptoticky normální**, pokud $\exists(\mu_n)_{n=1}^{+\infty} \in \mathbb{R}$, $\exists(\sigma_n)_{n=1}^{+\infty} > 0$ tak, že

$$\frac{X_n - \mu_n}{\sigma_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim N(0, 1), \quad \text{ozn.} \quad X_n \sim AN(\mu_n, \sigma_n^2).$$

Věta 5.25. Mějme $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ do \mathbb{R}^1 , kde $X_n \sim AN(\mu_n, \sigma_n^2)$, $\mu_n \rightarrow \mu$ a $\sigma_n^2 \rightarrow 0$. Pak $X_n \xrightarrow{P} \mu$. ($\Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mu$)

Věta 5.26 (CLT (centrální limitní teorém) Lindeberg-Lévy). Mějme $(X_j)_{j=1}^{+\infty}$ iid \mathcal{L}_2 .

Pak $\overline{X_n} \sim AN\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, tzn. $\sqrt{n} \frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, 1)$.

Jiný zápis: $\sqrt{n} (\overline{X_n} - \mu) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma^2)$.

Věta 5.27 (CLT Moivre-Laplace). Mějme $(X_j)_{j=1}^{+\infty}$ iid $A(p)$, $p \in (0, 1)$. Pak $\overline{X_n} \sim AN\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$.

$S_n \sim AN(np, np(1-p))$, tzn. $\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, 1)$.

5 Limitní věty - Zákony velkých čísel (Laws of Large Numbers)

Důsledek 5.28. $\overline{X}_n \sim \text{AN}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, tedy $\overline{X}_n - \mu \sim \text{AN}\left(0, \underbrace{\frac{\sigma^2}{n}}_{\rightarrow 0}\right) \Rightarrow \overline{X}_n - \mu \xrightarrow{P} 0 \quad (o_p(1))$.

Říkáme, že je konzistentní pro μ . Dále $n^\alpha(\overline{X}_n - \mu) \sim \text{AN}\left(0, \underbrace{n^{2\alpha-1}\sigma^2}_{\rightarrow 0}\right) \Rightarrow n^\alpha(\overline{X}_n - \mu) \xrightarrow{P} 0 \quad \forall \alpha < \frac{1}{2} \quad (o_p(n^{-\alpha}))$. Říkáme, že je konzistentní řádu $o_p(n^{-\alpha})$ pro μ .

Věta 5.29 (CLT Lindenberga-Fellera). Mějme $(X_j)_{j=1}^{+\infty}$ iid \mathcal{L}_2 (nezávislé). Nechť je splněna tzv. Lindenbergová podmínka:

$$\text{LP}_n^\varepsilon = \frac{1}{B_n^2} \sum_{j=1}^n \int_{|t-\mu_j| > \varepsilon B_n} |t - \mu_j|^2 dP^{X_j} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (\text{integrujeme přes } t)$$

Pak $\overline{X}_n \sim \text{AN}\left(\overline{\mu}_n, \frac{\sigma_n^2}{n}\right)$, tzn. $S_n \sim \text{AN}\left(\sum_{j=1}^n \mu_j, \sum_{j=1}^n \sigma_j^2\right)$, tedy $\frac{(\overline{X}_n - \overline{\mu}_n)\sqrt{n}}{\sqrt{\sigma_n^2}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, 1)$.

$$\frac{S_n - \sum_{j=1}^n \mu_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2}} = \frac{S_n - \text{ES}_n}{\sqrt{\text{DS}_n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, 1)$$

$$\text{FS}_n \doteq \text{F}_{N(\sum_{j=1}^n \mu_j, \sum_{j=1}^n \sigma_j^2)}$$

Věta 5.30 (CLT $_{\nu>2}$ - Ljapunov). Mějme $(X_j)_{j=1}^{+\infty}$ iid $\mathcal{L}_{\nu>2}$. Nechť je splněna podmínka

$$\text{L}_j \text{P}_n^\nu = \sum_{j=1}^n \text{E}|X_j - \mu_j|^\nu = o(B_n^\nu), \quad \text{tzn} \quad \frac{\sum_{j=1}^n \text{E}|X_j - \mu_j|^\nu}{B_n^\nu} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Pak $\overline{X}_n \sim \text{AN}\left(\overline{\mu}_n, \frac{\sigma_n^2}{n}\right)$.

Věta 5.31 (Pólya theorem). Mějme náhodné veličiny $(X_j)_{j=1}^{+\infty}$, X a distribuční funkce $(F_{X_j})_{j=1}^{+\infty}$, F_X . Nechť $F_{X_j} \rightarrow F_X$ a F_X je spojitá. Pak $F_{X_j} \xrightarrow{\mathbb{R}} F_X$.

Důsledek 5.32. Konvergence v CLT je stejnoměrná na \mathbb{R} .

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_{Z_n} - F_{N(0,1)}| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \quad \text{kde } Z_n := \frac{S_n - \text{ES}_n}{\sqrt{\text{DS}_n}}$$

Věta 5.33 (Berry-Essen). Nechť $(X_j)_{j=1}^{+\infty}$ iid \mathcal{L}_3 . Pak

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_{Z_n} - F_{N(0,1)}| \leq c \frac{\text{E}|X_1 - \mu|^3}{\sigma^3} \frac{1}{\sqrt{n}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

kde c je konstanta menší než 1.

Věta 5.34. Mějme $(\mathbb{X}_j)_{j=1}^{+\infty}$ iid \mathcal{L}_2 do \mathbb{R}^s . Označme $\boldsymbol{\mu} = \text{E}\mathbb{X}_j$, $\mathbb{C} = \text{Cov}(\mathbb{X}_j) \quad \forall j \in \mathbb{N}$. Definujeme $Y_j = \boldsymbol{\alpha}(\mathbb{X}_j - \boldsymbol{\mu}) \quad \forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^s$.

$$\text{E}Y_j = \boldsymbol{\alpha}(\text{E}\mathbb{X}_j - \boldsymbol{\mu}) = 0$$

$$\text{D}Y_j = \text{D}(\boldsymbol{\alpha}(\mathbb{X}_j - \boldsymbol{\mu})) = \text{D}(\boldsymbol{\alpha}\mathbb{X}_j) = \boldsymbol{\alpha}\mathbb{C}\boldsymbol{\alpha}^T < +\infty$$

5 Limitní věty - Zákony velkých čísel (Laws of Large Numbers)

Definice 5.35. Mějme $(\mathbb{X})_{j=1}^{+\infty}$ do \mathbb{R}^s . Řekneme, že mají **s-rozměrné Gaussovo rozdělení**, pokud

$$\alpha \mathbb{X} \sim N_1(\alpha \mu, \alpha \mathbb{C} \alpha^T) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^s,$$

kde označujeme $\mu = E\mathbb{X}$ a $\mathbb{C} = \text{Cov}(\mathbb{X})$.

Věta 5.36 (CLT v \mathbb{R}^s). Mějme $(\mathbb{X}_j)_{j=1}^{+\infty}$ iid \mathcal{L}_2 (do \mathbb{R}^s). Pak $\overline{X_n} \sim \text{AN}_s(\mu, \frac{1}{n}\mathbb{C})$.

Věta 5.37 (Delta-metoda (∇)). Mějme $(\mathbb{X}_n)_{n=1}^{+\infty}$ do \mathbb{R}^s , $\mathbb{X}_n \sim \text{AN}_s(\mu_n, \sigma_n^2 \mathbb{C})$. Nechť dále $\mu_n \rightarrow \mu$, $\sigma_n \rightarrow 0$ a $g : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^1$ je borelovská spojitě diferencovatelná funkce. Pak

$$g(\mathbb{X}_n) \sim \text{AN}(g(\mu_n), \sigma_n^2 \nabla g(\mu) \mathbb{C} \nabla g(\mu)^T).$$

Věta 5.38. Mějme $\mathbb{X} \sim N_s(\mu, \mathbb{C})$. Pak $\varphi_{\mathbb{X}}(t) = e^{i\mu t - \frac{1}{2}t \mathbb{C} t^T} \quad \forall t \in \mathbb{R}^s$.

Věta 5.39. Nechť $\mathbb{X} \sim N_s(\mu, \mathbb{C})$, \mathbb{D} je matice $s \cdot k$, $1 \leq k \leq s$. Pak $\mathbb{Y} = \mathbb{D}\mathbb{X} \sim N_k(\mathbb{D}\mu, \mathbb{D}\mathbb{C}\mathbb{D}^T)$.

Věta 5.40. Nechť $\mathbb{X} \sim N_1(\mu, \mathbb{C})$. Pak X_j jsou nezávislé $\Leftrightarrow (X_j)_1^s$ jsou po dvou nekorelované.

Důsledek 5.41. $(X_j)_1^s$ id $N(\mu_j, \sigma_j^2) \Leftrightarrow \mathbb{X} \sim N_s(\mu, \mathbb{C} = \text{diag}(\sigma_j^2)_1^s)$

Věta 5.42. Mějme $\mathbb{X} \sim N_s(\mu, \mathbb{C})$ a nechť \mathbb{C} je regulární (tzn. \mathbb{C} je PD). Pak $\exists \mathbb{A}$ regulární ($s \cdot s$) tak, že $\mathbb{X} = \mathbb{A}\mathbb{Z} + \mu$, kde $\mathbb{Z} \sim N_s(\mathbf{0}, \mathbb{I})$ a $\mathbb{A}\mathbb{A}^T = \mathbb{C}$. ($(Z_j)_1^s$ iid $N(0, 1)$)

Věta 5.43. Mějme $\mathbb{X} \sim N_s(\mu, \mathbb{C})$. Pak hustota pravděpodobnosti \mathbb{X} existuje $\Leftrightarrow \mathbb{C}$ je regulární.

$$f_{\mathbb{X}}(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sqrt{|\mathbb{C}|}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \mathbb{C}^{-1}(x-\mu)}$$